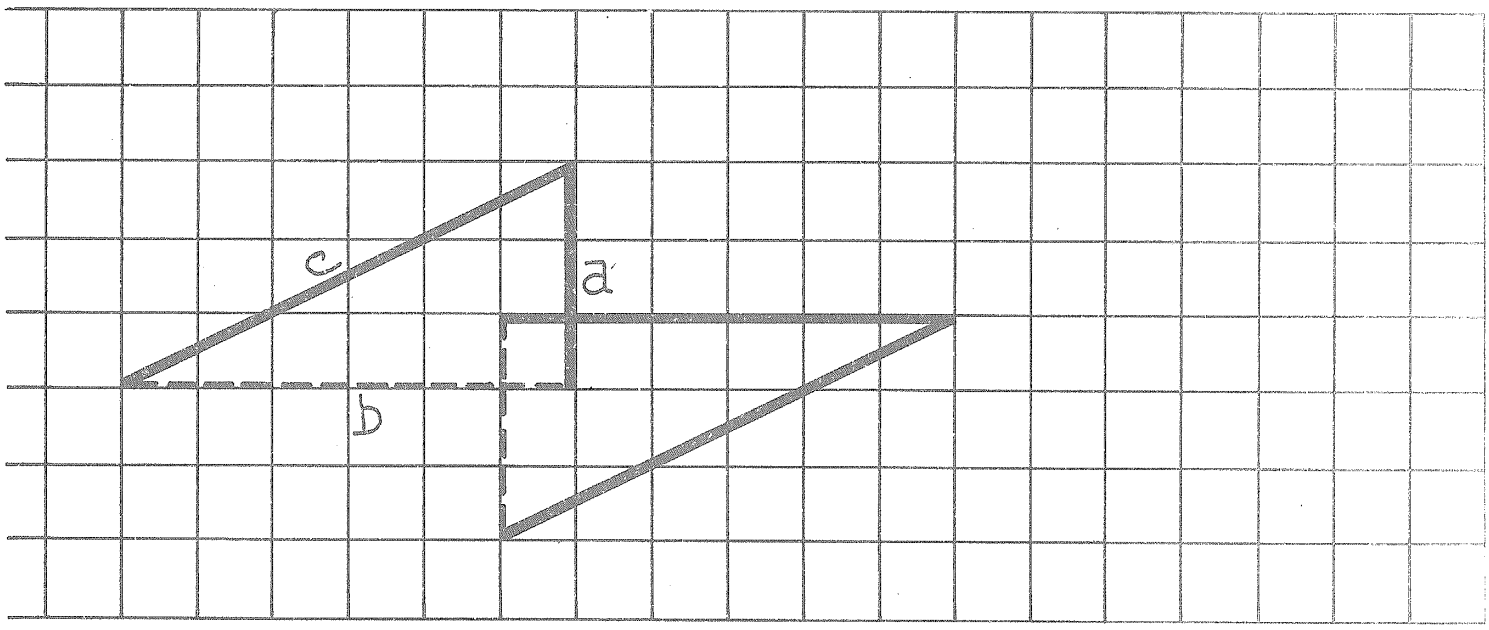
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Obras que integran el bloque 5 (*Trigonometría*)

1. Las razones trigonométricas de un ángulo agudo
2. ***Resoluciones de triángulos rectos***
3. El círculo trigonométrico
4. Las funciones trigonométricas
5. Las funciones trigonométricas inversas
6. Identidades trigonométricas
7. Resolución de triángulos cualesquiera
8. Ecuaciones trigonométricas

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 5

Trigonometría

Módulo 2

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España,
Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.,
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, febrero 1985
ISBN 968-24-0841-5

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bioques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

2.1 Resolución de triángulos rectángulos. Caso 1. Dadas las medidas de dos lados 9

2.2 Resolución de triángulos rectángulos. Caso 2. Dadas las medidas de un lado y de un ángulo agudo 27

2.3 Resolución incompleta de triángulos rectángulos. Ejercicios de determinación de medidas de lados 42

2.4 Resolución incompleta de triángulos rectángulos. Ejercicios de determinación de medidas de ángulos 59

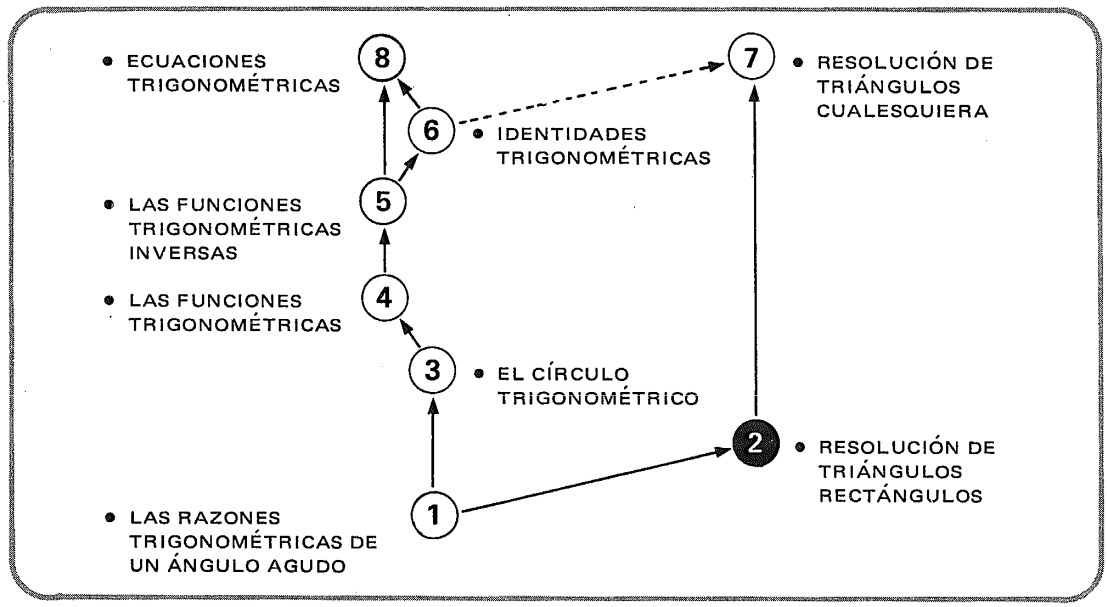
2.5 Resolución de triángulos rectángulos. Problemas de aplicación 65

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 5. Trigonometría

Objetivos: caracterizar las seis funciones trigonométricas y sus inversas, y aplicar los conocimientos correspondientes a la resolución de problemas prácticos

Esquema estructural del bloque 5



Módulo 2. Resolución de triángulos rectángulos

Objetivos: resolver un triángulo rectángulo, dadas las medidas de algunos de sus elementos, y aplicar este conocimiento a la resolución de problemas prácticos

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética, y la raíz cuadrada	—	—
• Razón y proporción (concepto y manejo)	—	—
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Propiedades geométricas del triángulo y de los demás polígonos convexos	4	4, 5
• Teorema de Pitágoras (concepto y manejo)	4	6
• Áreas de polígonos convexos	4	7
• Las razones trigonométricas de un ángulo agudo	5	1

2.1

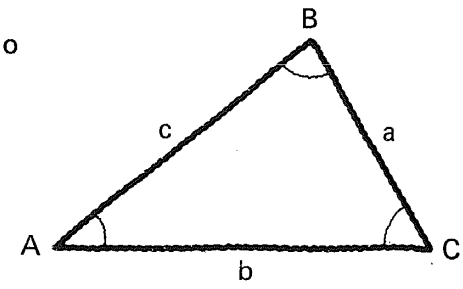
Resolución de triángulos rectángulos.
Caso 1. Dadas las medidas de dos lados

1

Consideremos un triángulo cualquiera

Tiene 6 elementos:

- 3 lados,
- 3 ángulos interiores.



2

Si se conocen las medidas de tres de los seis elementos, "convenientemente seleccionados", es posible determinar las medidas de los tres elementos faltantes.

3

El proceso de determinación
de las medidas de
los elementos faltantes
a partir de las
conocidas
se llama

resolución del triángulo.

4

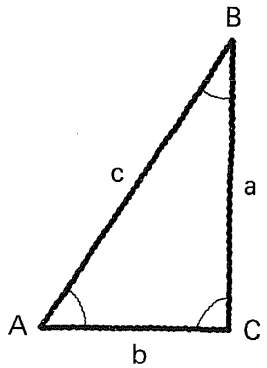
Hemos dicho:
"convenientemente seleccionados"
porque a veces no basta
con conocer las
medidas de tres
elementos cualesquiera
para poder determinar
las de los elementos faltantes.

5

Atención.

Supongamos que
se conocen las medidas
de los tres ángulos interiores
del triángulo ABC.
¿Estaríamos en condiciones
de determinar las medidas
de los otros tres elementos,
en este caso, de los tres lados?

Sí/No



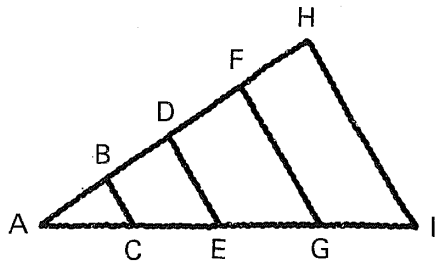
No

6

Hemos trazado

$\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{FG} \parallel \overleftrightarrow{HI}$

Observemos
que los triángulos
ABC, ADE, AFG y AHI
tienen sus
tres ángulos interiores
respectivamente
congruentes,
y sin embargo,
las medidas de sus lados
homólogos son diferentes.



7

Podemos decir que:

Las medidas de los tres ángulos interiores

no determinan un triángulo único.

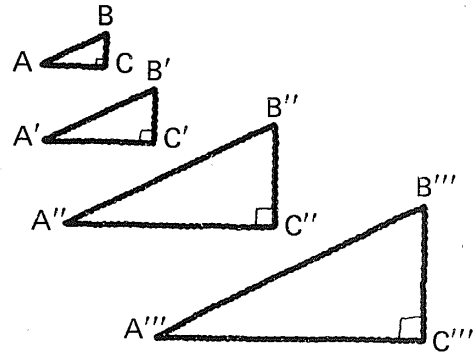
8

En otras palabras; no es posible
"construir" un triángulo único
a partir de las medidas de sus
tres ángulos interiores.
En los triángulos rectángulos
ABC, A'B'C', A''B''C'', A'''B'''C'''
se verifica que:

$\measuredangle A = \measuredangle A' = \measuredangle A'' = \measuredangle A'''$

$\measuredangle B = \measuredangle B' = \measuredangle B'' = \measuredangle B'''$

y sin embargo, **los triángulos no son congruentes.**
Hay un infinito número de triángulos que podemos
"construir" a partir de las medidas de tres
ángulos interiores dados.



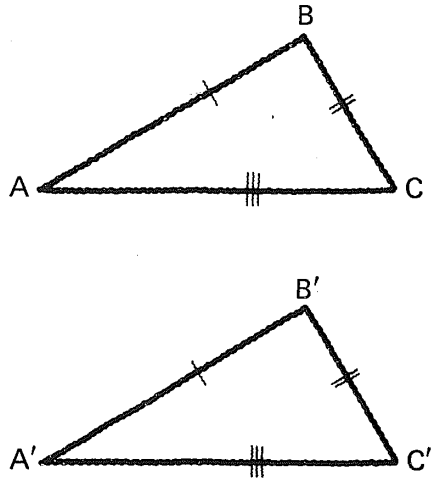
9

Conviene recordar aquí
los **criterios** para la **congruencia**
de dos triángulos.

1. Criterio LLL

1. $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
2. $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$
3. $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$



10

Si

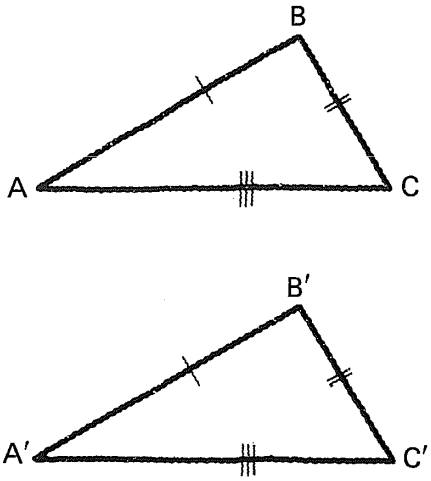
1. $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
2. $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$
3. $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

entonces:

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$,

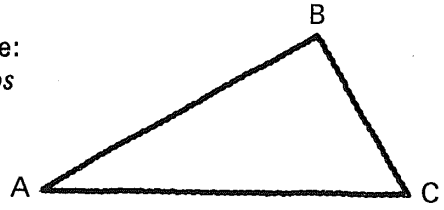
y por lo tanto:

4. $\angle A \cong \angle A'$
5. $\angle B \cong \angle B'$
6. $\angle C \cong \angle C'$



11

Nos permitiremos decir que:
las medidas de los tres lados "determinan un triángulo único".



12

2. Criterio ALA.

Si

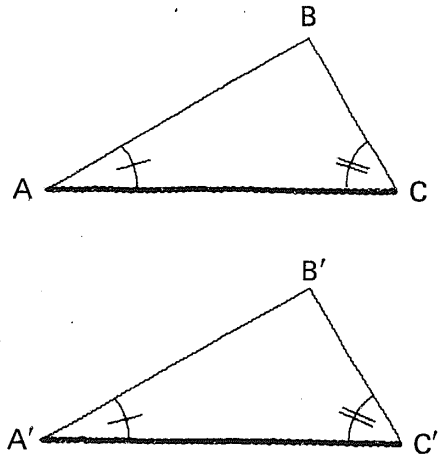
1. $\angle A \cong \angle A'$
2. $\angle C \cong \angle C'$
3. $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

entonces,

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

y por lo tanto:

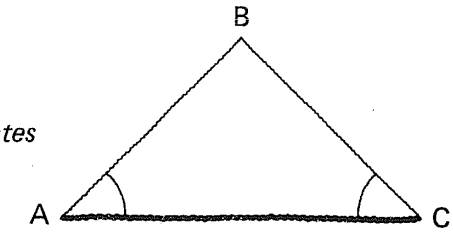
4. $\angle B \cong \angle B'$
5. $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
6. $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$



13

Digamos que:

las medidas de un lado y los dos ángulos adyacentes a él "determinan un triángulo único".



14

3. Criterio LAL.

Si

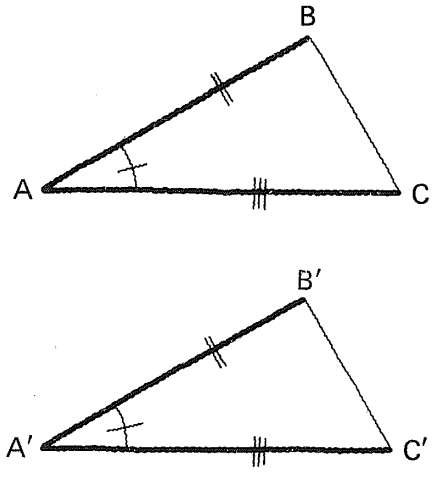
1. $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
2. $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$
3. $\angle A \cong \angle A'$

entonces,

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

y por lo tanto:

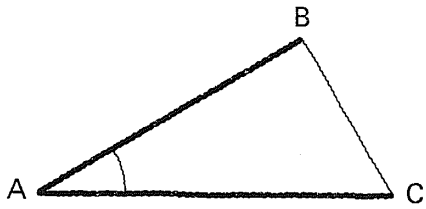
4. $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$
5. $\angle B \cong \angle B'$
6. $\angle C \cong \angle C'$



15

Expresémoslo así:

Las medidas de dos lados y el ángulo comprendido "determinan un triángulo único".



16

4. Criterio LLA.

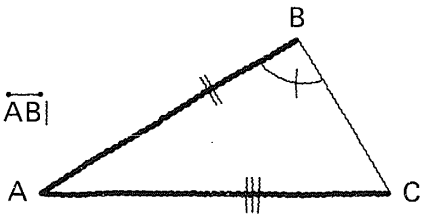
Si

1. $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
2. $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

$\Big\}\ |\overline{AC}| > |\overline{AB}|$

3. $\angle B \cong \angle B'$

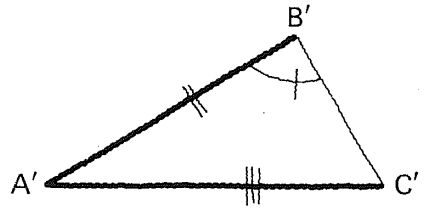
entonces,



$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

y por lo tanto:

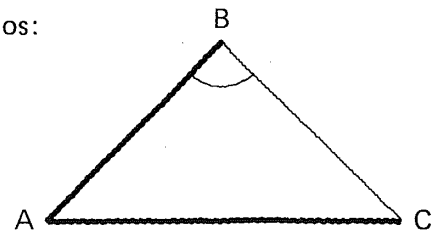
4. $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$
5. $\angle A \cong \angle A'$
6. $\angle C \cong \angle C'$



17

Pongámoslo en estos términos:

las medidas de dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos "determinan un triángulo único".



18

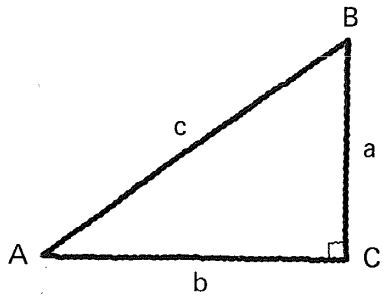
En este punto de nuestro estudio,
concentraremos la atención
en la

resolución de
triángulos rectángulos.

19

Hay un elemento
cuya medida es igual
para todos los triángulos
rectángulos; es

_____

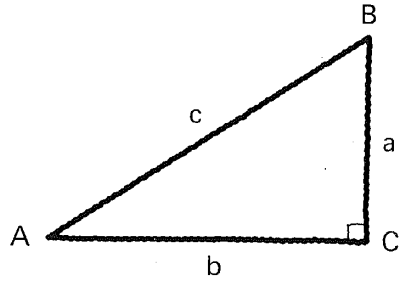


el ángulo recto

20

Atención.

Entonces,
bastará con conocer
las medidas
de dos elementos
"convenientemente
seleccionados"
de un
triángulo rectángulo
para que éste
pueda ser resuelto.

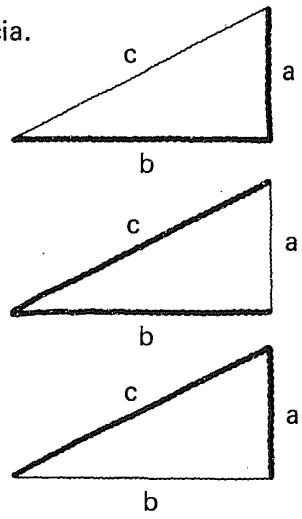


21

Revisemos los criterios de congruencia.
Hemos dicho que:

las medidas de los tres lados, "determinan un triángulo único";

pero en un triángulo rectángulo, bastará con que nos sean dadas las medidas de **dos** de sus **lados**, ya que el tercero puede ser determinado por medio del teorema de Pitágoras.

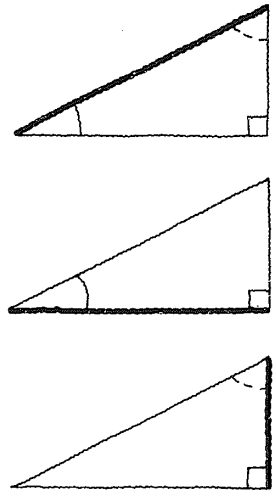


22

Afirmamos que:

las medidas de un lado y los dos ángulos adyacentes a él, "determinan un triángulo único".

En un triángulo rectángulo bastará con conocer la medida de **un lado** y la **de uno de los ángulos agudos**, ya que la medida del otro ángulo agudo puede ser determinada fácilmente.



23

Criterio LAL.

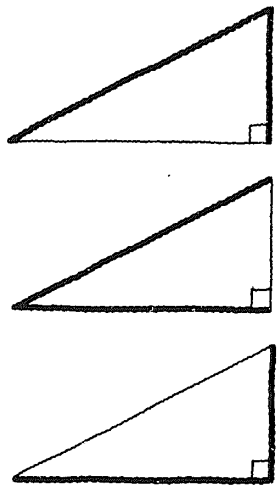
Las medidas de dos lados y el ángulo comprendido "determinan un triángulo único".

En un triángulo rectángulo, bastará con conocer las medidas de dos lados (caso ya considerado), o las medidas de un lado y un ángulo agudo (caso ya considerado).

24

Criterio LLA.

Las medidas de dos lados y del ángulo interior opuesto al mayor de ellos "determinan un triángulo único".



Esto
nos conduce a
casos ya considerados.

25

En resumen,
podemos decir que:

1. *Las medidas de dos lados "determinan un triángulo rectángulo único".*

2. *Las medidas de un lado y un ángulo agudo "determinan un triángulo rectángulo único".*

26

Por lo tanto,
podemos considerar

dos casos
para la resolución de
triángulos rectángulos.

1. *Dadas las medidas de dos lados.*

2. *Dadas las medidas de un lado y un ángulo agudo.*

27

Resolución de triángulos rectángulos

Caso 1. Dadas las medidas de dos lados.

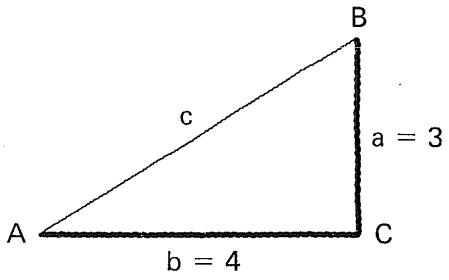
28

En el △ rectángulo representado,

a = 3 cm

b = 4 cm

y los elementos de medida no conocida son:



En cualquier orden:

c

<A

<B

29

datos:

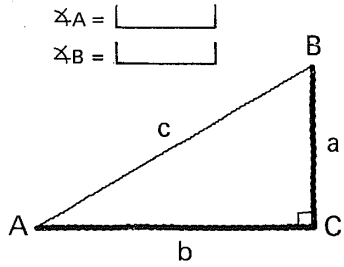
a = 3 cm
b = 4 cm

incógnitas:

c =

∡A =

∡B =



Organicemos la información de esta manera.

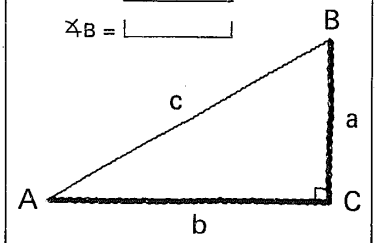
30

datos:

a = 3 cm
b = 4 cm

Incógnitas:

c = ⌊_____⌋
∡A = ⌊_____⌋
∡B = ⌊_____⌋



1. Empecemos por **determinar la medida del lado c.**

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$c = \sqrt{3^2 + 4^2}$

$c = \sqrt{9 + 16}$

$c = \sqrt{25}$

$c = 5$

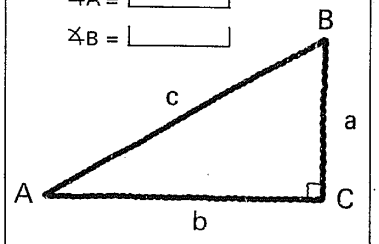
31

datos:

a = 3 cm
b = 4 cm

incógnitas:

c = 5 cm
∡A = ⌊_____⌋
∡B = ⌊_____⌋



2. Determinación de ∡A.

Hay que establecer una razón trigonométrica del ángulo A que relacione las medidas de dos lados cualesquiera (de preferencia las de los lados inicialmente dados).

Por ejemplo:

$\tan A = \frac{\square}{\square}$ ← literales

$\frac{a}{b}$

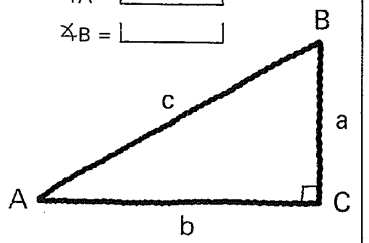
32

datos:

a = 3 cm
b = 4 cm

incógnitas:

c = 5 cm
∡A = ⌊_____⌋
∡B = ⌊_____⌋



$\tan A = \frac{a}{b}$

Sustituir datos:

$\tan A = \frac{\square}{\square}$

$\frac{3}{4}$

33

datos:

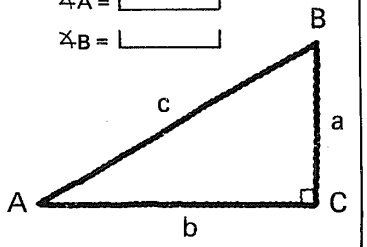
a = 3 cm
b = 4 cm

incógnitas:

c = 5 cm

$\measuredangle A =$ ⌊_____⌋

$\measuredangle B =$ ⌊_____⌋



$\tan A = \frac{3}{4}$

$\tan A =$ ⌊_____⌋

fracción decimal equivalente

0.75

34

datos:

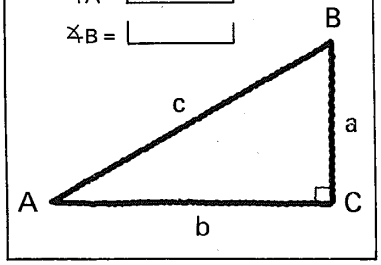
a = 3 cm
b = 4 cm

incógnitas:

c = 5 cm

$\measuredangle A =$ ⌊_____⌋

$\measuredangle B =$ ⌊_____⌋



$\tan A = 0.75$

$\measuredangle A = \arctan 0.75 \doteq$ ⌊_____⌋

$36.87° \doteq 36°52'$

35

datos:

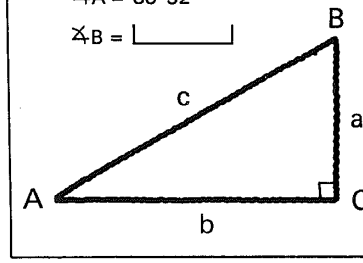
a = 3 cm
b = 4 cm

incógnitas:

c = 5 cm

$\measuredangle A = 36°52'$

$\measuredangle B =$ ⌊_____⌋



3. Determinación de $\measuredangle B$.

$\measuredangle B =$ ⌊_____⌋

$\measuredangle A + \measuredangle B = 90°$

$\measuredangle B = 90° - \measuredangle A$

$\measuredangle B = 90° - 36°52'$

$53°08'$

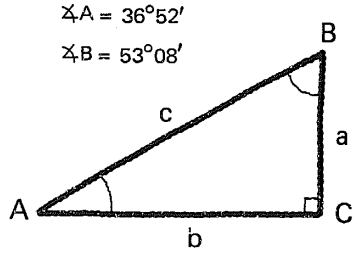
36

datos:

a = 3 cm
b = 4 cm

incógnitas despejadas:

c = 5 cm
$\measuredangle A = 36°52'$
$\measuredangle B = 53°08'$



Determinadas las medidas de los tres lados del triángulo, podemos calcular el perímetro.

expresión general

perímetro $\triangle ABC$ = ↓ ↓ ↓ cm

a + b + c

3 + 4 + 5

12

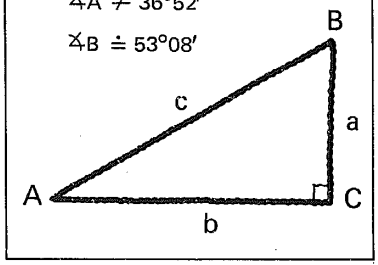
37

datos:

a = 3 cm
b = 4 cm

incógnitas despejadas:

c = 5 cm
$\measuredangle A \neq 36°52'$
$\measuredangle B \doteq 53°08'$



También estamos en condiciones de calcular el área.

expresión general

área $\blacktriangle ABC$ = ↓ ↓ ↓ cm^2

$\frac{ab}{2}$

$\frac{4 \times 3}{2}$

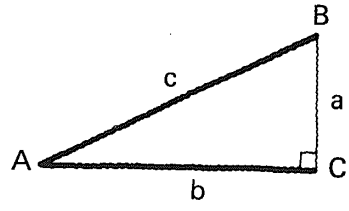
6

38

Queremos resolver un triángulo rectángulo en que:

c = 10.52 m
b = 8.75 m

Los elementos cuyas medidas se quiere conocer son:



En cualquier orden:

a

$\measuredangle A$

$\measuredangle B$

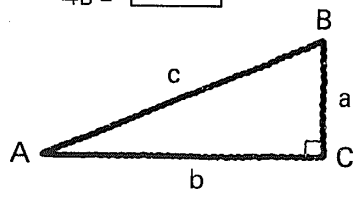
39

datos:

c = 10.52 m
b = 8.75 m

incógnitas:

a = ⌊_____⌋
∡A = ⌊_____⌋
∡B = ⌊_____⌋



1. Cálculo de la medida del cateto a.

a ≐ ⌊_____⌋ m

$a = \sqrt{c^2 - b^2}$

$a = \sqrt{10.52^2 - 8.75^2}$

$a \doteq \sqrt{110.67 - 76.56}$

$a \doteq \sqrt{34.11}$

5.84

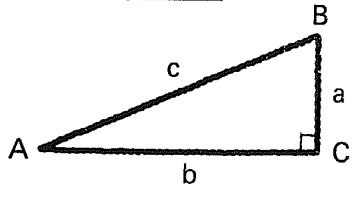
40

datos:

c = 10.52 m
b = 8.75 m

incógnitas:

a = 5.84m
∡A = ⌊_____⌋
∡B = ⌊_____⌋



2. Cálculo de ∡A.

Establecimiento de la razón trigonométrica adecuada.

↓

⌊_____⌋

Por ejemplo:

$\cos A = \frac{b}{c}$

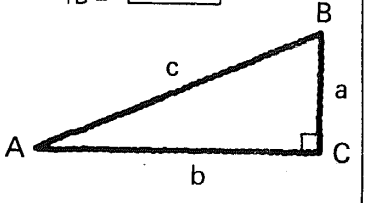
41

datos:

c = 10.52 m
b = 8.75 m

incógnitas:

a ≐ 5.84m
∡A = ⌊_____⌋
∡B = ⌊_____⌋



$\cos A = \frac{b}{c}$

Sustituyendo datos:

$\cos A = \frac{\square}{\square}$

$\frac{8.75}{10.52}$

42

datos:

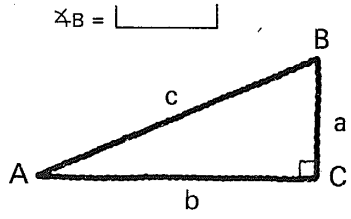
c = 10.52 m
b = 8.75 m

incógnitas:

a ≐ 5.84m

$\measuredangle A =$ ⌊_____⌋

$\measuredangle B =$ ⌊_____⌋



$\cos A = \frac{8.75}{10.52}$

$\cos A \doteq$ ⌊_____⌋

↑ expresar en forma de fracción decimal, en 4 cifras decimales.

0.8317

43

datos:

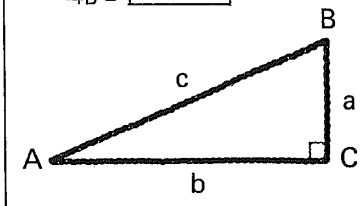
c = 10.52 m
b = 8.75 m

incógnitas:

a ≐ 5.84m

$\measuredangle A =$ ⌊_____⌋

$\measuredangle B =$ ⌊_____⌋



$\cos A = 0.8317$

$\measuredangle A = \text{arcos } 0.8317 \doteq$ ⌊_____⌋

$33.73° \doteq 33°44'$

44

datos:

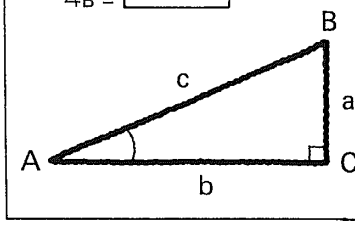
c = 10.52 m
b = 8.75 m

incógnitas:

a ≐ 5.84m

$\measuredangle A \doteq 33°44'$

$\measuredangle B =$ ⌊_____⌋



3. Cálculo de $\measuredangle B$.

$\measuredangle B =$ ⌊_____⌋

$\measuredangle A + \measuredangle B = 90°$
$\measuredangle B = 90° - \measuredangle A$
$\measuredangle B = 90° - 33°44'$

$56°16'$

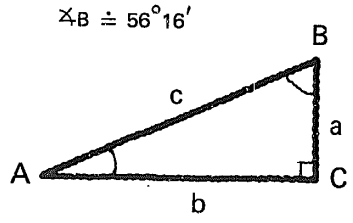
45

datos:

c = 10.52 m
b = 8.75 m

incógnitas despejadas:

a ≐ 5.84m
$\measuredangle A \doteq 33°44'$
$\measuredangle B \doteq 56°16'$



perímetro △ABC ≐ ⌊ ⌋

↓

⌊ ⌋

↓

⌊ ⌋

a + b + c

5.84 + 8.75 + 10.52

25.11 m

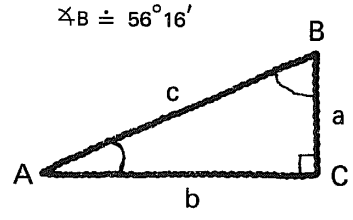
46

datos:

c = 10.52 m
b = 8.75 m

incógnitas despejadas:

a ≐ 5.84m
$\measuredangle A \doteq 33°44'$
$\measuredangle B \doteq 56°16'$



área ▲ABC ≐ ⌊ ⌋

↓

⌊ ⌋

↓

⌊ ⌋

$\frac{ab}{2}$

$\frac{5.84 \times 8.75}{2}$

25.55 m^2

47

Podemos bosquejar
el siguiente procedimiento
para la

resolución de un triángulo rectángulo
cuando se conocen
las medidas de dos de sus lados.

Ver cuadros siguientes.

48

1. Determinación de la medida del tercer lado por medio del teorema de Pitágoras.

49

2. Determinación de uno de los ángulos agudos, estableciendo una razón trigonométrica de dicho ángulo, que involucre las medidas de dos lados (de preferencia las proporcionadas como datos).

50

3. Determinación de la medida del otro ángulo agudo teniendo en cuenta que los dos ángulos agudos son complementarios.

5.2.1.1

Práctica adicional
de
resolución de triángulos rectángulos
dadas las medidas de dos de sus
lados,
si se considera necesario.

5.2.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* un triángulo rectángulo, dadas las medidas de dos de sus lados.

2.2

Resolución de triángulos rectángulos.

Caso 2. Dadas las medidas
de un lado y un ángulo agudo

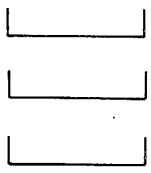
51

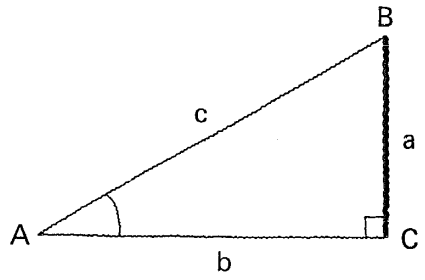
Sea el triángulo rectángulo ABC en que:

$a = 3\ m$

$\sphericalangle A = 35°20'$

Para que el triángulo quede completamente resuelto, hay que determinar:





En cualquier orden:

$\sphericalangle B$

b

c

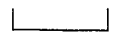
52

datos:

$a = 3m$

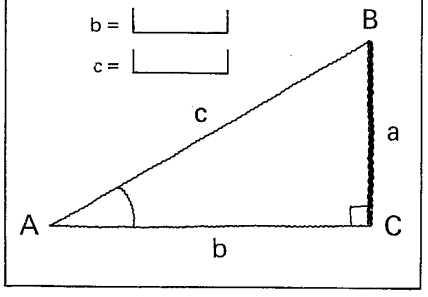
$\sphericalangle A = 35°20'$

incógnitas:

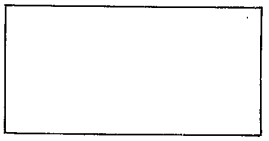
$\sphericalangle B =$ 

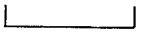
$b =$

$c =$



1. Determinación de $\sphericalangle B$



$\sphericalangle B =$ 

$\sphericalangle A + \sphericalangle B = 90°$

$\sphericalangle B = 90° - \sphericalangle A$

$\sphericalangle B = 90° - 35°20'$

$54°40'$

53

datos:

$a = 3$ m

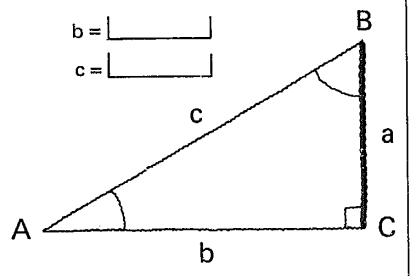
$\measuredangle A = 35°20'$

incógnitas:

$\measuredangle B = 54°40'$

$b =$ ____

$c =$ ____



2. Determinación de la medida de uno de los lados faltantes, digamos b.

Establecemos una razón trigonométrica que relacione la medida del lado por conocer (b) con la del lado conocido (a).

Por ejemplo:

$\frac{b}{a} =$ ____

tan B (o cot A)

54

datos

$a = 3$ m

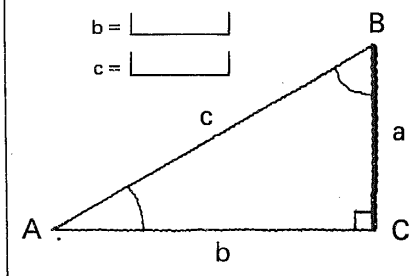
$\measuredangle A = 35°20'$

incógnitas:

$\measuredangle B \doteq 54°40'$

$b =$ ____

$c =$ ____



$\frac{b}{a} = \tan B$

de donde:

$b =$ ____

a tan B

55

datos:

$a = 3$ m

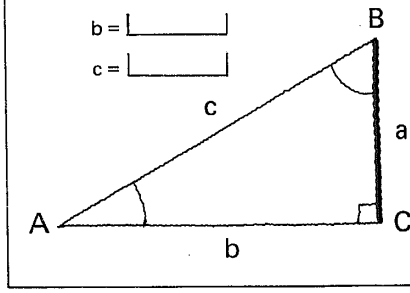
$\measuredangle A = 35°20'$

incógnitas:

$\measuredangle B \doteq 54°40'$

$b =$ ____

$c =$ ____



$b = a \tan B$

Sustituir datos:

$b =$ ____

$3 \tan 54°40'$

56

datos:

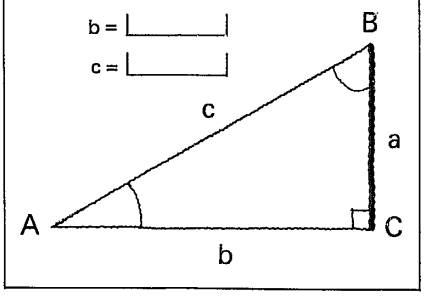
a = 3 m
$\measuredangle A = 35°20'$

incógnitas:

$\measuredangle B \doteq 54°40'$

b = ⌊ ⌋

c = ⌊ ⌋



b = 3 tan 54°40'

b = 3 X ⌊ ⌋

1.4106

57

datos:

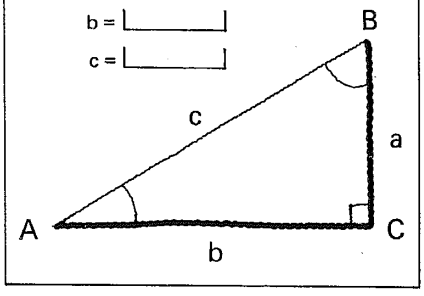
a = 3 m
$\measuredangle A = 35°20'$

incógnitas:

$\measuredangle B \doteq 54°40'$

b = ⌊ ⌋

c = ⌊ ⌋



b ≐ 3 X 1.4106

b ≐ ⌊ ⌋

4.2318

58

datos:

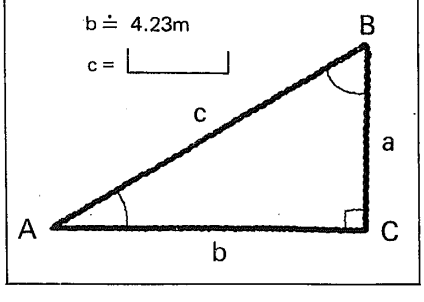
a = 3 m
$\measuredangle A = 35°20'$

incógnitas:

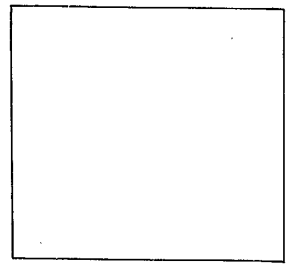
$\measuredangle B \doteq 54°40'$

b ≐ 4.23m

c = ⌊ ⌋



3. Determinación de la medida del lado faltante, por medio del teorema de Pitágoras.



c = ⌊ ⌋

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$c \doteq \sqrt{3^2 + 4.23^2}$

$c \doteq \sqrt{9 + 17.89}$

$c \doteq \sqrt{26 \cdot 89}$

5.19

59

datos:

$a = 3$ m

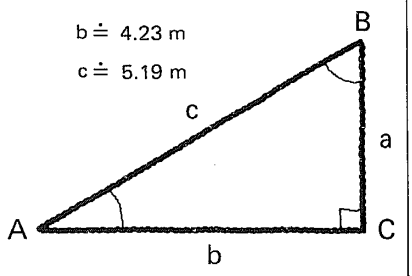
$\measuredangle A = 35°20'$

incógnitas despejadas:

$\measuredangle B \doteq 54°40'$

$b \doteq 4.23$ m

$c \doteq 5.19$ m



Decimos que el triángulo ABC ha sido completamente resuelto.

60

datos:

$a = 3$ m

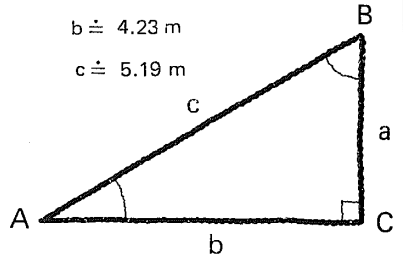
$\measuredangle A = 35°20'$

incógnitas despejadas:

$\measuredangle B \doteq 54°40'$

$b \doteq 4.23$ m

$c \doteq 5.19$ m



perímetro $\triangle ABC \doteq$ ⌊ ⌋

↓

⌊ ⌋

↓

⌊ ⌋

$a + b + c$

$3 + 4.23 + 5.19$

12.42 m

61

datos:

$a = 3$ m

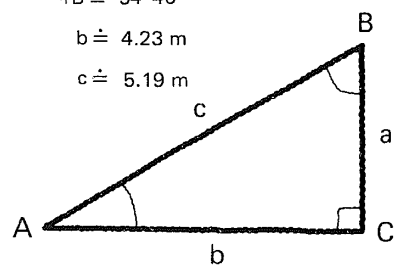
$\measuredangle A = 35°20'$

incógnitas despejadas:

$\measuredangle B \doteq 54°40'$

$b \doteq 4.23$ m

$c \doteq 5.19$ m



área $\blacktriangle ABC \doteq$ ⌊ ⌋

↓

⌊ ⌋

↓

⌊ ⌋

$\frac{ab}{2}$

$\frac{3 \times 4.23}{2}$

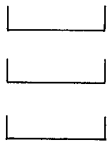
$6.35\ m^2$

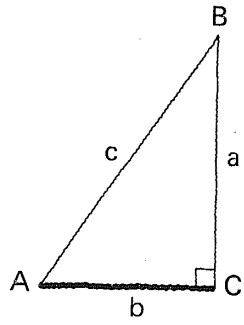
62

Otro ejemplo.
En el triángulo rectángulo representado

$\sphericalangle A = 64°15'$
$b = 200$ km

Incógnitas:





En cualquier orden:

$\sphericalangle B$

a

c

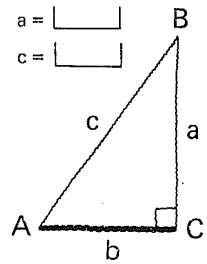
63

datos:

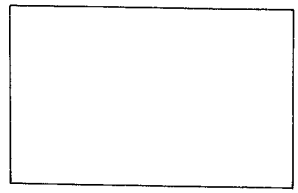
$\sphericalangle A = 64°15'$
$b = 200$ km

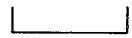
incógnitas:

$\sphericalangle B =$
$a =$
$c =$



1. Determinación de $\sphericalangle B$.



$\sphericalangle B =$ 

$\sphericalangle A + \sphericalangle B = 90°$
$\sphericalangle B = 90° - \sphericalangle A$
$\sphericalangle B = 90° - 64°15'$

$25°45'$

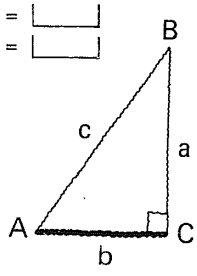
64

datos:

$\sphericalangle A = 64°15'$
$b = 200$ km

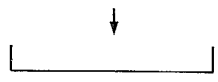
incógnitas:

$\sphericalangle B \doteq 25°45'$
$a =$
$c =$



2. Determinación de a.

Razón trigonométrica:



$\frac{a}{b} = \tan A$

65

datos:

$\measuredangle A = 64°15'$

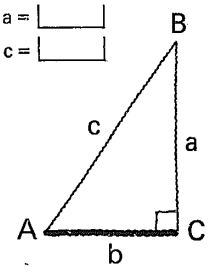
$b = 200$ km

incógnitas:

$\measuredangle B \doteq 25°45'$

$a =$ ____

$c =$ ____



$\frac{a}{b} = \tan A$

de donde:

$a =$ ____

b tan A

66

datos:

$\measuredangle A = 64°15'$

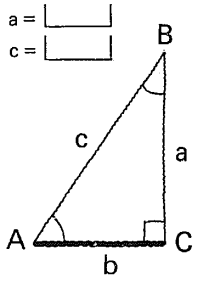
$b = 200$ km

incógnitas:

$\measuredangle B \doteq 25°45'$

$a =$ ____

$c =$ ____



$a = b \tan A$

Sustituyendo datos:

$a =$ ____

200 tan 64°15′

67

datos:

$\measuredangle A = 64°15'$

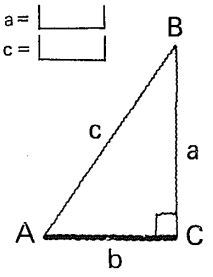
$b = 200$ km

incógnitas:

$\measuredangle B \doteq 25°45'$

$a =$ ____

$c =$ ____



$a = 200 \tan 64°15'$

$a \doteq 200 \times$ ____

2.0732

68

datos:

$\measuredangle A = 64°15'$

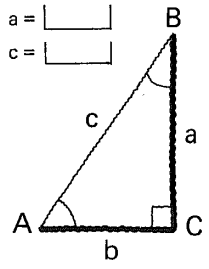
$b = 200$ km

incógnitas:

$\measuredangle B \doteq 25°45'$

$a =$ ⌊___⌋

$c =$ ⌊___⌋



$a \doteq 200 \times 2.0732$

$a \doteq$ ⌊_____⌋

414.64

69

datos:

$\measuredangle A = 64°15'$

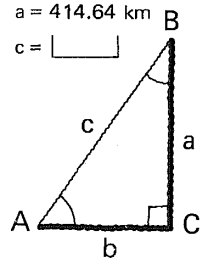
$b = 200$ km

incógnitas:

$\measuredangle B \doteq 25°45'$

$a = 414.64$ km

$c =$ ⌊___⌋



3. Determinación de c.

Como una ruta alternativa, puede determinarse c estableciendo otra razón trigonométrica.

Por ejemplo:

$\frac{b}{c} =$ ⌊___⌋ A.

cos

70

datos:

$\measuredangle A = 64°15'$

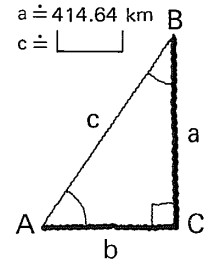
$b = 200$ km

incógnitas:

$\measuredangle B \doteq 25°45'$

$a \doteq 414.64$ km

$c \doteq$ ⌊___⌋



$\frac{b}{c} = \cos A$

$c =$ ⌊_____⌋

$\frac{b}{\cos A}$

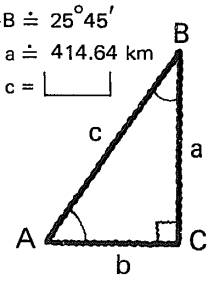
71

datos:

$\measuredangle A \doteq 64°15'$
$b \doteq 200$ km

incógnitas:

$\measuredangle B \doteq 25°45'$
$a \doteq 414.64$ km
$c =$ ⌊ ⌋



$$c = \frac{b}{\cos A}$$

$c =$ ⌊ ⌋

$$c = \frac{200}{\cos 64°15'}$$

$$c \doteq \frac{200}{0.4344}$$

↓

460.41 km

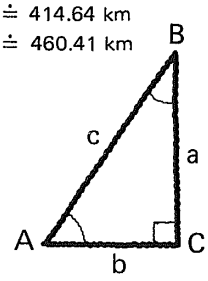
72

datos:

$\measuredangle A = 64°15'$
$b = 200$ km

incógnitas despejadas:

$\measuredangle B \doteq 25°45'$
$a \doteq 414.64$ km
$c \doteq 460.41$ km



Teniendo las medidas de los tres lados, podemos comprobar los resultados sabiendo que debe verificarse de acuerdo con Pitágoras:

⌊ ⌋

Se verifica/no se verifica.

$c^2 = a^2 + b^2$

$460.41^2 = 414.64^2 + 200^2$

$211\,977.37 = 171\,926.33$
$+ 40\,000$

$211\,977.37 \doteq 211\,926.33$

se verifica

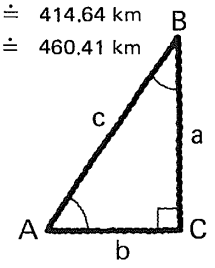
73

datos:

$\measuredangle A = 64°15'$
$b = 200$ km

incógnitas despejadas:

$\measuredangle B = 25°45'$
$a \doteq 414.64$ km
$c \doteq 460.41$ km



perímetro del $\triangle ABC \doteq$ ⌊ ⌋

↓

⌊ ⌋

↓

⌊ ⌋ km

$a + b + c$

$414.64 + 200.00 + 460.41$

1075.05

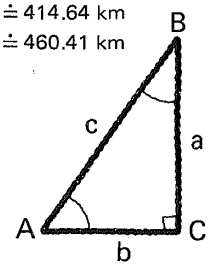
74

datos:

$\measuredangle A = 64°15'$
$b = 200$ km

incógnitas despejadas:

$\measuredangle B = 25°45'$
$a \doteq 414.64$ km
$c \doteq 460.41$ km



área ▲ABC = ⌊ ⌋

⌊ ⌋ ↓

⌊ ⌋ ↓

⌊ ⌋ km^2

$\frac{ab}{2}$

$\frac{414.64 \times 200}{2}$

41464

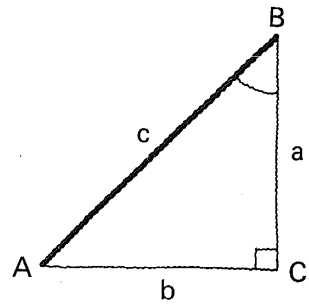
75

Un triángulo rectángulo más, en que:

$c = 100$ m
$\measuredangle B = 42°37'$

Incógnitas:

⌊ ⌋
⌊ ⌋
⌊ ⌋



En cualquier orden:

$\measuredangle A$

a

b

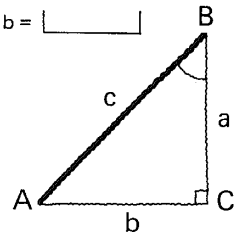
76

datos:

$c = 100$ m
$\measuredangle B = 42°37'$

incógnitas:

$\measuredangle A =$ ⌊ ⌋
$a =$ ⌊ ⌋
$b =$ ⌊ ⌋



1. Determinación de $\measuredangle A$.

⌊ ⌋

$\measuredangle A =$ ⌊ ⌋

$\measuredangle A + \measuredangle B = 90°$
$\measuredangle A = 90° - \measuredangle B$
$\measuredangle A = 90° - 42°37'$

$47°23'$

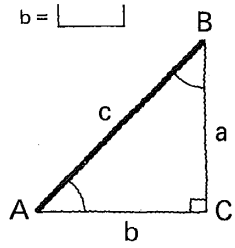
77

datos:

c = 100 m
$\measuredangle B = 42°37'$

incógnitas:

$\measuredangle A \doteq 47°23'$
a = ⌊___⌋
b = ⌊___⌋



2. Determinación de a.

Establecimiento de la razón trigonométrica.

Por ejemplo:

⌊_____⌋

$\frac{a}{c}$ = sen A

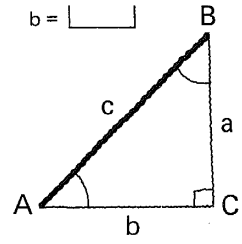
78

datos:

c = 100 m
$\measuredangle B = 42°37'$

incógnitas:

$\measuredangle A \doteq 47°23'$
a = ⌊___⌋
b = ⌊___⌋



$\frac{a}{c}$ = sen A

a = c sen A
a = 100 sen 47°23′
a = 100 X 0.7359

73.59

a ≐ ⌊___⌋

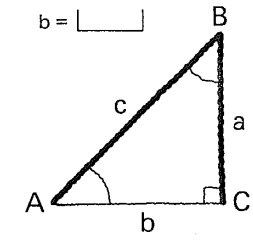
79

datos:

c = 100 m
$\measuredangle B = 42°37'$

incógnitas:

$\measuredangle A \doteq 47°23'$
a ≐ 73.59 m
b = ⌊___⌋



3. Determinación de b.

Utilizando la segunda ruta alternativa que hemos estudiado.

Por ejemplo:

⌊_____⌋
↑
Razón trigonométrica.

$\frac{b}{c}$ = cos A

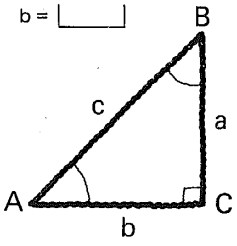
80

datos:

$c = 100$ m
$\measuredangle B = 42°37'$

incógnitas:

$\measuredangle A \doteq 47°23'$
$a \doteq 73.59$ m
$b =$ ⌊___⌋



$\frac{b}{c} = \cos A$

⌊ ⌋

$b \doteq$ ⌊___⌋

$b = c \cos A$
$b = 100 \cos 47°23'$
$b = 100 \times 0.6771$

67.71

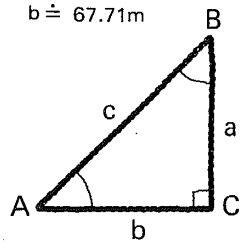
81

datos:

$c = 100$ m
$\measuredangle B = 42°37'$

incógnitas despejadas:

$\measuredangle A \doteq 47°23'$
$a \doteq 73.59$ m
$b \doteq 67.71$m



Comprobación,
por medio del teorema
de Pitágoras.

⌊ ⌋

se verifica/no se verifica.

$c^2 = a^2 + b^2$
$100^2 = 73.59^2 + 67.71^2$
$10\,000 = 5415.49 + 4584.64$
$10\,000 \doteq 10\,000.13$

se verifica

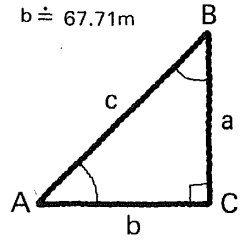
82

datos:

$c = 100$ m
$\measuredangle B = 42°37'$

incógnitas despejadas:

$\measuredangle A \doteq 47°23'$
$a \doteq 73.59$ m
$b \doteq 67.71$m



Perímetro del $\triangle ABC \doteq$ ⌊___⌋

↓

⌊___⌋

↓

⌊___⌋

$a + b + c$

$73.59 + 67.71 + 100.00$

241.30 m

83

datos:

$c = 100$ m

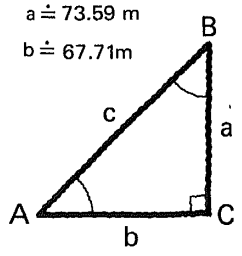
$\measuredangle B = 42°37'$

incógnitas despejadas:

$\measuredangle A \doteq 47°23'$

$a \doteq 73.59$ m

$b \doteq 67.71$m



área ▲ ABC

$$\frac{ab}{2}$$

$$\frac{73.59 \times 67.71}{2}$$

$2491.39\ m^2$

84

Procedimiento para la

resolución
de un triángulo rectángulo
cuando se conocen
las medidas de un lado
y un ángulo agudo.

Ver cuadros siguientes.

85

1. Determinación de la medida del otro ángulo agudo, restando de 90° la medida del ángulo conocido.

86

2. Determinación de la medida de uno de los lados faltantes, estableciendo una razón trigonométrica apropiada que involucre la medida del lado por conocer y la del lado conocido.

87

3. Ruta alternativa 1.

Determinación de la medida del tercer lado, mediante el teorema de Pitágoras.

88

3. Ruta alternativa 2.

Determinación de la medida del tercer lado, estableciendo una razón trigonométrica apropiada,
y comprobando los resultados obtenidos por medio del teorema de Pitágoras.

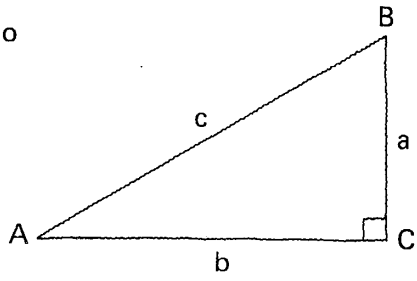
89

No debemos olvidar que
en todo triángulo rectángulo
se debe verificar:

$c^2 = a^2 + b^2$

y

$\measuredangle A + \measuredangle B = 90°$



5.2.2.1

Práctica adicional
de
resolución de triángulos rectángulos,
dadas las medidas de un lado
y un ángulo agudo,
si se considera necesario.

5.2.2.2

Práctica adicional
de resolución de triángulos rectángulos
de cualquiera de los casos estudiados,
si se considera necesario.

5.2.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* un triángulo rectángulo, dadas las medidas de un lado y un ángulo agudo.

2.3

Resolución incompleta de triángulos rectángulos. Ejercicios de determinación de medidas de lados

90

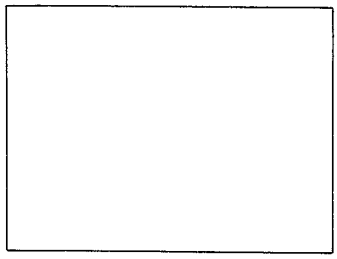
En los problemas trigonométricos
que se suelen presentar en la práctica
no es necesario resolver completamente
un triángulo dado.
Por lo general, basta con determinar
alguno o algunos de sus elementos.

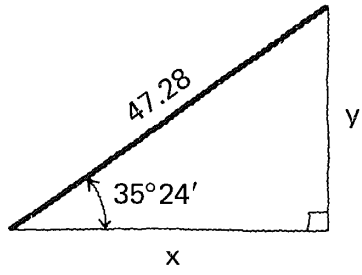
91

En los ejercicios que siguen,
el alumno sugerirá situaciones
en las que pueda aplicarse
cada uno de los modelos
estudiados.

92

En la figura representada:





$x \doteq$ ____

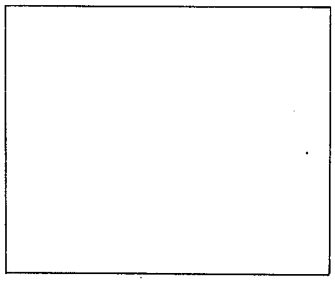
$$\frac{x}{47.28} = \cos 35°24'$$

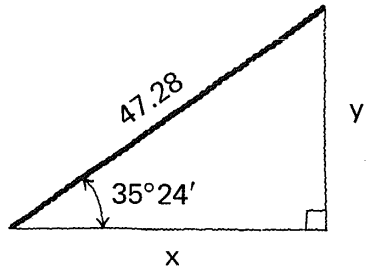
$$x = 47.28 \cos 35°24'$$

$$x \doteq 47.28 \times 0.8151$$

38.54

93





$y \doteq$ ____

$$\frac{y}{47.28} = \text{sen } 35°24'$$

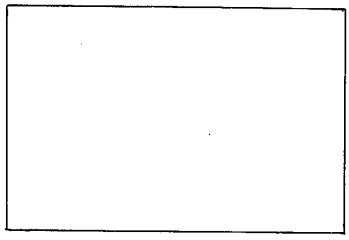
$$y = 47.28 \text{ sen } 35°24'$$

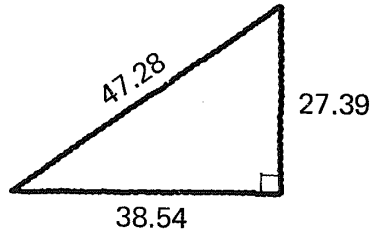
$$y = 47.28 \times 0.5793$$

27.39

94

Comprobación, de acuerdo con Pitágoras:





se verifica/no se verifica.

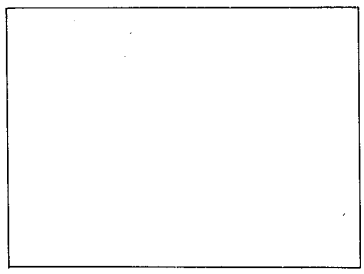
$$47.28^2 = 38.54^2 + 27.39^2$$

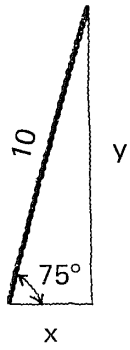
$$2235.40 = 1485.33 + 750.21$$

2235.40 ≐ 2235.54

se verifica

95





$x \doteq$ _____

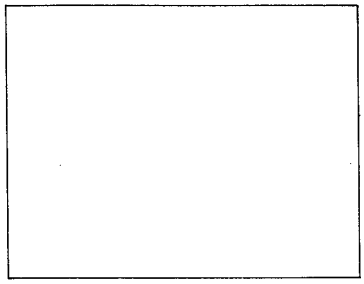
$$\frac{x}{10} = \cos 75°$$

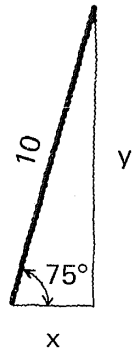
$$x = 10 \cos 75°$$

$$x = 10 \times 0.2588$$

2.59

96





$y \doteq$ _____

$$\frac{y}{10} = \text{sen } 75°$$

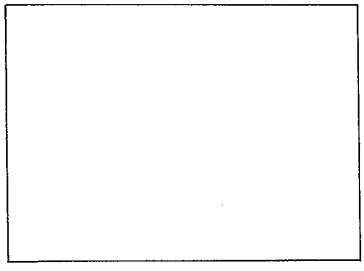
$$x = 10 \text{ sen } 75°$$

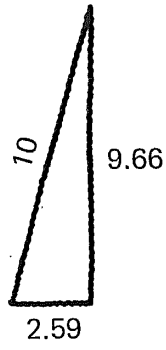
$$y = 10 \times 0.9659$$

9.66

97

Comprobación:



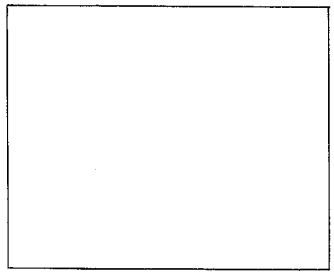


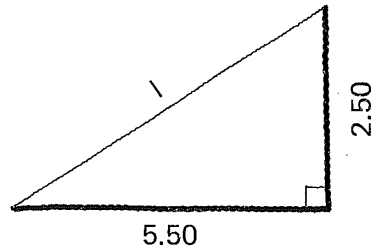
$$10^2 = 2.59^2 + 9.66^2$$

$$100.00 = 6.71 + 93.32$$

$$\underline{100.00} \doteq \underline{100.03}$$

98





$l \doteq$ ____

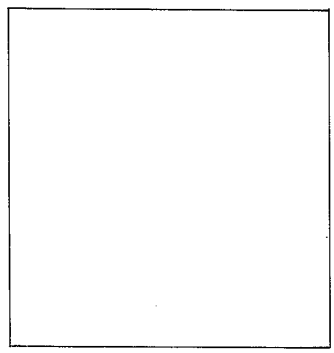
$l = \sqrt{5.50^2 + 2.50^2}$

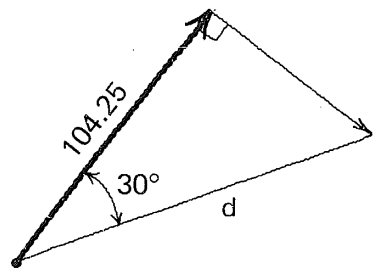
$l = \sqrt{30.25 + 6.25}$

$l = \sqrt{36.50}$

6.04

99





$d \doteq$ ____

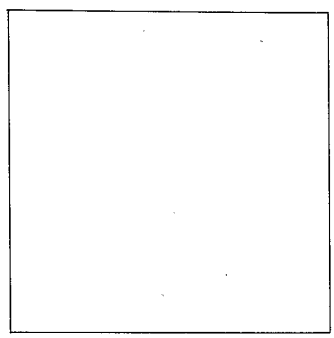
$\frac{104.25}{d} = \cos 30°$

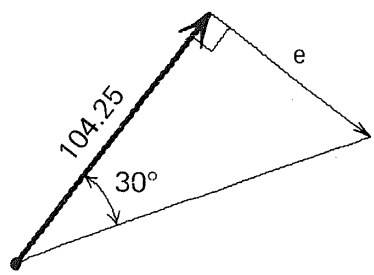
$d = \frac{104.25}{\cos 30°}$

$d = \frac{104.25}{0.8660}$

120.38

100





$e \doteq$ ____

Por ejemplo:

$\frac{e}{104.25} = \tan 30°$

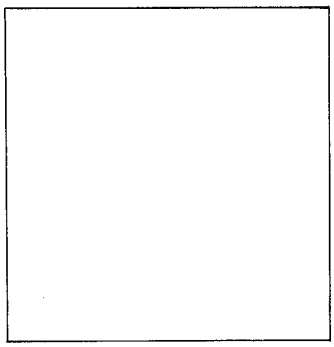
$e = 104.25 \tan 30°$

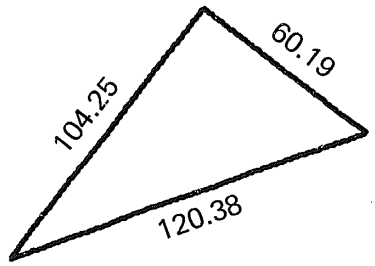
$e \doteq 104.25 \times 0.5774$

60.19

101

Comprobación:



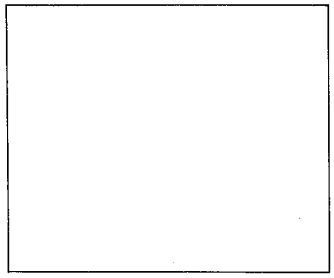


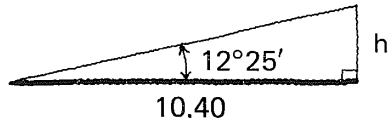
$120.38^2 = 104.25^2 + 60.19^2$

$14\ 491.34 = 10\ 868.06 + 3622.84$

$14\ 491.34 \doteq 14\ 490.90$

102





$h \doteq$ _____

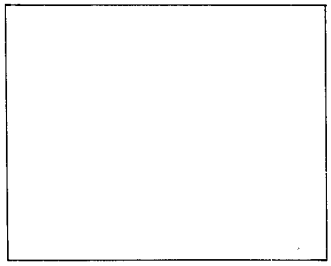
$$\frac{h}{10.40} = \tan 12°25'$$

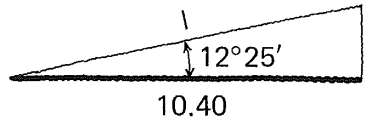
$h = 10.40 \tan 12°25'$

$h = 10.40 \times 0.2202$

2.29

103





$l \doteq$ _____

$$\frac{10.40}{l} = \cos 12°25'$$

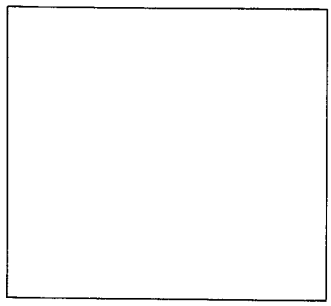
$$l = \frac{10.40}{\cos 12°25'}$$

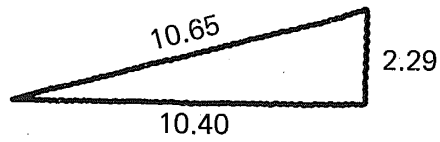
$$l = \frac{10.40}{0.9766}$$

10.65

104

Comprobación:





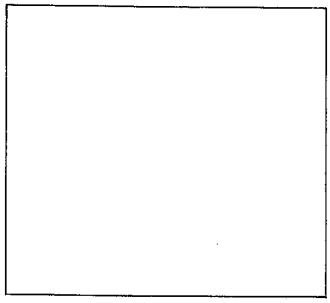
$10.65^2 = 2.29^2 + 10.40^2$

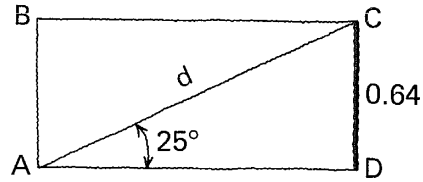
$113.42 = 5.24 + 108.16$

$113.42 = 113.40$

105

ABCD es un rectángulo.





$d \doteq$ _____

$$\frac{0.64}{d} = \text{sen } 25°$$

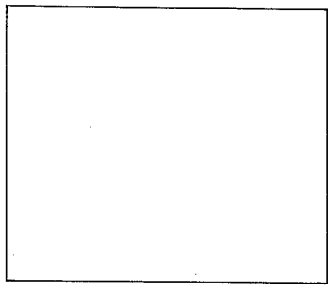
$$d = \frac{0.64}{\text{sen } 25°}$$

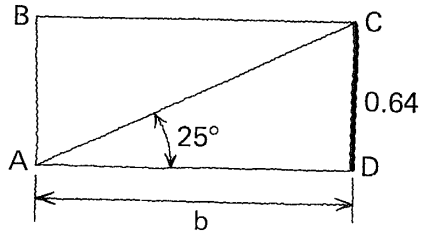
$$d = \frac{0.64}{0.4226}$$

1.51

106

ABCD es un rectángulo.





$b \doteq$ _____

$$\frac{0.64}{b} = \tan 25°$$

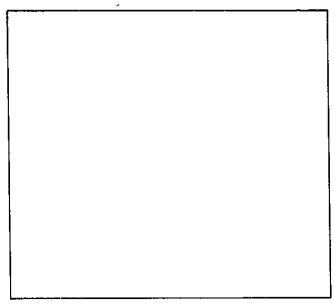
$$b = \frac{0.64}{\tan 25°}$$

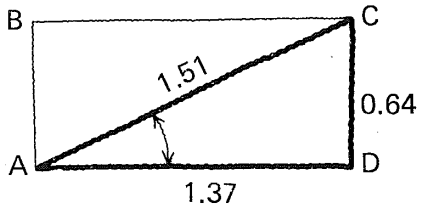
$$b \doteq \frac{0.64}{0.4663}$$

1.37

107

ABCD es un rectángulo.
Comprobación:





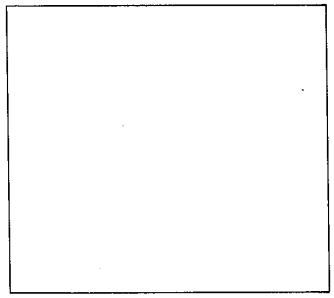
$1.51^2 = 0.64^2 + 1.37^2$

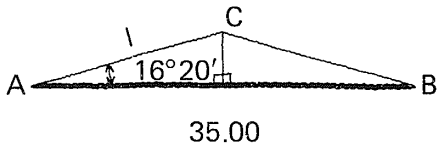
$2.2801 = 0.4096 + 1.8769$

$2.2801 = 2.2865$

108

El $\triangle ABC$ es isósceles
tal que $\overleftrightarrow{AC} \cong \overleftrightarrow{CB}$.





$l \doteq$ ____

$|\overleftrightarrow{AD}| = |\overleftrightarrow{DB}| = \frac{35}{2}$

$= 17.50$

$\frac{17.50}{l} = \cos 16°20'$

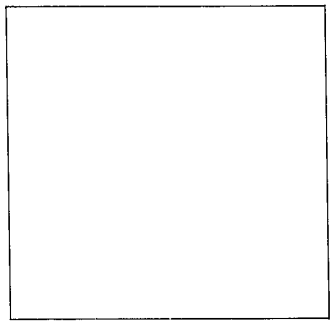
$l = \frac{17.50}{\cos 16°20'}$

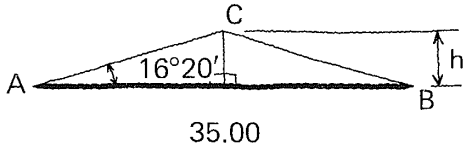
$l \doteq \frac{17.50}{0.9596}$

18.24

109

El $\triangle ABC$ es isósceles.





$h \doteq$ ____

$|\overleftrightarrow{AD}| = |\overleftrightarrow{DB}| = \frac{35}{2}$

$= 17.50$

$\frac{h}{17.50} = \tan 16°20'$

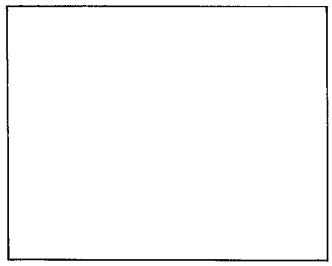
$h = 17.50 \tan 16°20'$

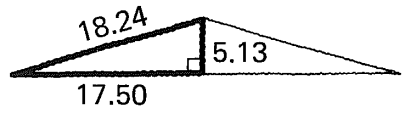
$h = 17.50 \times 0.2931$

5.13

110

Comprobación:





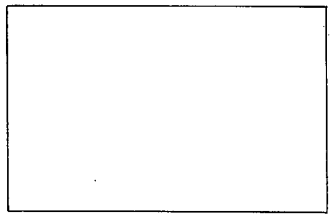
$18.24^2 = 5.13^2 + 17.50^2$

$332.70 = 26.32 + 306.25$

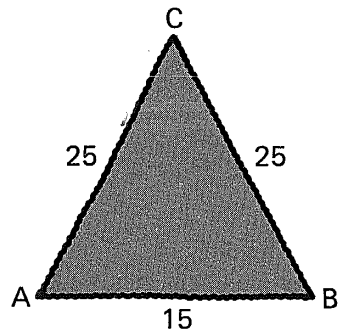
$332.70 = 332.57$

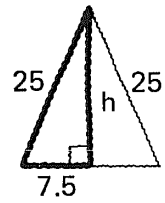
111

Se requiere determinar el área de la región triangular representada, para lo cual vamos primero a calcular la altura correspondiente al vértice C.



h = ____





$h = \sqrt{25^2 - 7.5^2}$

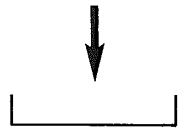
$h = \sqrt{625.00 - 56.25}$

$h = \sqrt{568.75}$

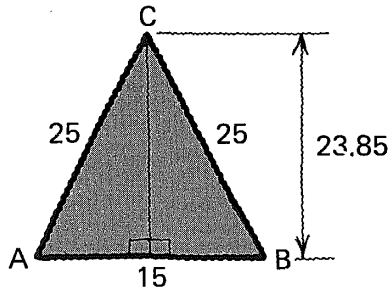
23.85

112

Área ▲ABC ≐ ____



____



$\frac{15 \times 23.85}{2}$

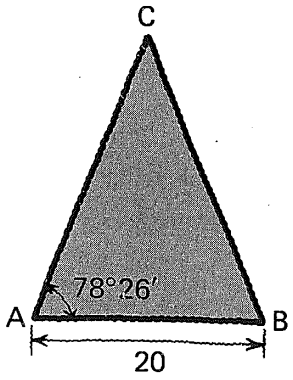
178.88

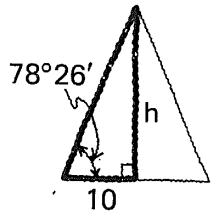
113

Se requiere calcular el área de la región triangular isósceles ABC, en que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

Cálculo de la altura (h) correspondiente al vértice C

$h \doteq$ ____





$\frac{h}{10} = \tan 78°26'$

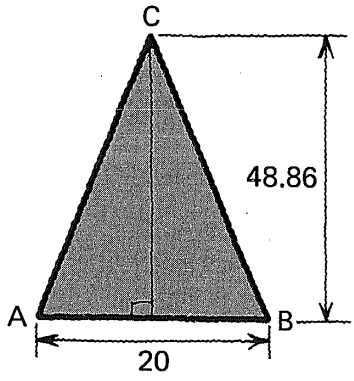
$h = 10 \tan 78°26'$

$h \doteq 10 \times 4.8860$

48.86

114

Área de $\triangle ABC \doteq$ ____



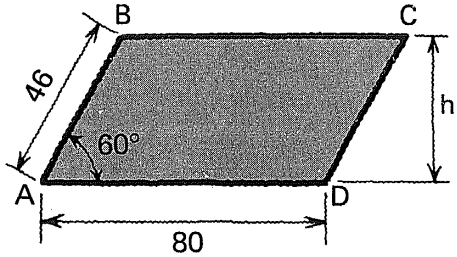
$\frac{20 \times 48.86}{2}$

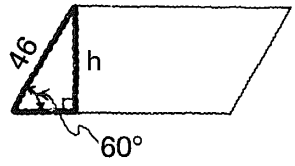
488.60

115

Se requiere determinar el área de la región limitada por el paralelogramo ABCD, para lo cual empezaremos por calcular la medida de la altura h.

$h \doteq$ ____





$\frac{h}{46} = \text{sen } 60°$

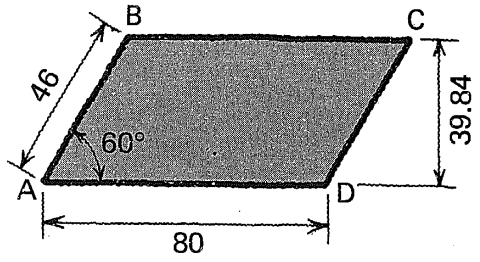
$h = 46 \text{ sen } 60°$

$h \doteq 46 \times 0.8660$

39.84

116

Área ABCD ≐ ↓ ☐ ↓ ☐

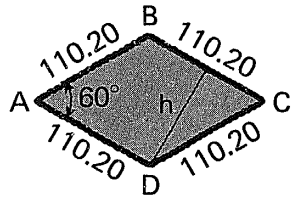


80 X 39.84

3187.20

117

ABCD es un rombo;
se requiere determinar
el área de la región que
limita.
Recordemos que el área de
una región romboidal es
igual al producto de las medidas
de la base y la altura.

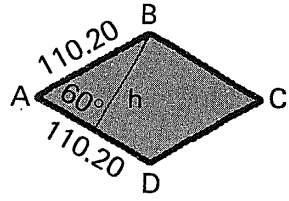


Medida de la base = ☐

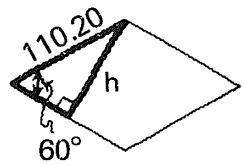
110.20

118

Determinación de la altura (h).



h ≐ ☐



$\frac{h}{110.20} = \text{sen } 60°$

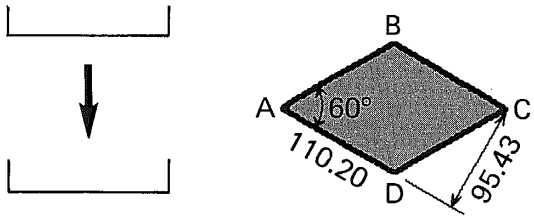
$h = 110.20 \text{ sen } 60°$

$h \doteq 110.20 \times 0.8660$

95.43

119

Área ABCD ≐ ⌊_____⌋

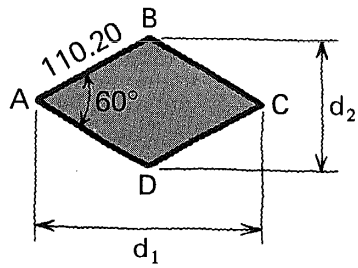


110.20 X 95.43

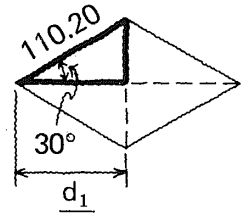
10 516.39

120

Un procedimiento alternativo para determinar el área de la región romboidal ABCD, teniendo presente que tal área es igual al semiproducto de las medidas de las dos diagonales.



diagonal d_1 ≐ ⌊_____⌋



$\frac{\frac{d_1}{2}}{110.20} = \cos 30°$

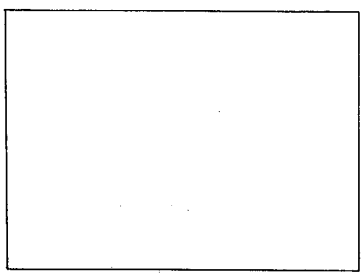
$\frac{d_1}{2} = 110.20 \cos 30°$

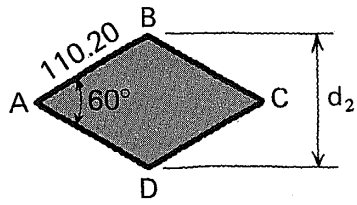
$d_1 = 2 \times 110.20 \cos 30°$

$d_1 = 2 \times 110.20 \times 0.8660$

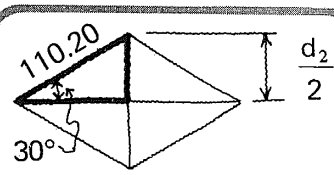
190.87

121





diagonal d_2 ≐ ⌊_____⌋



$\frac{\frac{d_2}{2}}{110.20} = \text{sen } 30°$

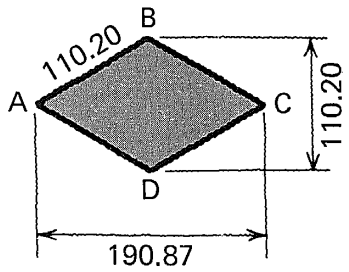
$\frac{d_2}{2} = 110.20 \text{ sen } 30°$

$d_2 = 2 \times 110.20 \times 0.5$

110.20

122

Área ABCD ≐ ⌊_____⌋



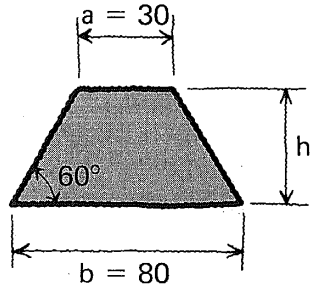
$$\frac{190.87 \times 110.20}{2}$$

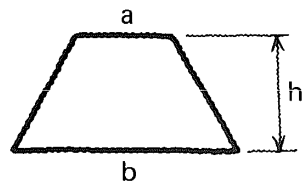
10 516.94

123

Requerimos el área de la región trapecial isósceles representada.
Recordemos que el área de una región tal está dada por la expresión:

A = ⌊_____⌋



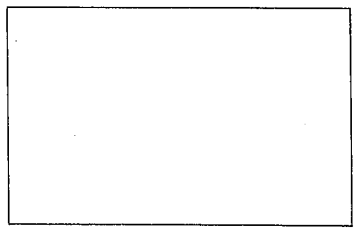


$$\frac{(a + b)h}{2}$$

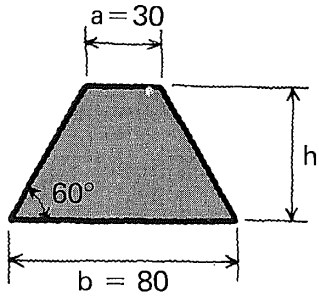
124

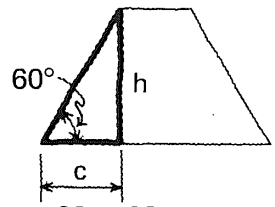
$$A = \frac{(a + b)h}{2}$$

Determinación de la medida de la altura (h).



h ≐ ⌊_____⌋





$$c = \frac{80 - 30}{2} = 25$$

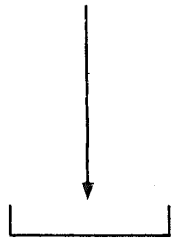
$$\frac{h}{c} = \tan 60°$$

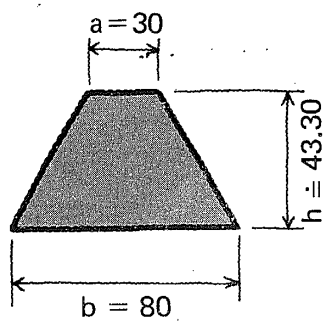
$h = c \tan 60°$
$h = 25 \tan 60°$
$h \doteq 25 \times 1.7321$

43.30

125

Área ABCD ≐ ⌊_____⌋





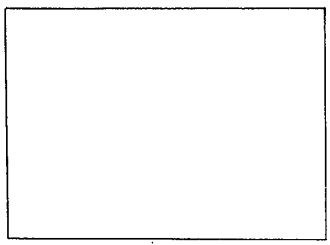
$$\frac{(80 - 30)43.30}{2}$$

$$\frac{50 \times 43.30}{2}$$

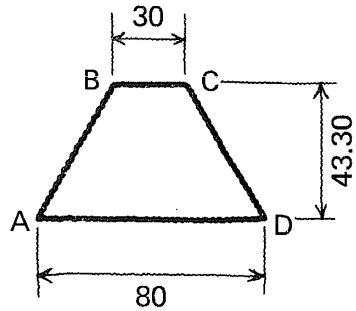
1082.50

126

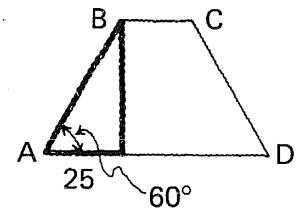
Se requiere determinar, ahora, el perímetro del trapecio isósceles ABCD.
Para ello es necesario conocer las medidas de los lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.



$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| =$ ⌊_____⌋



Por ejemplo:



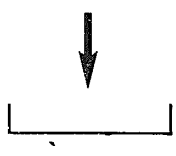
$$\frac{25}{|\overrightarrow{AB}|} = \cos 60°$$

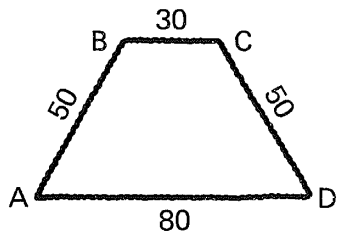
$$|\overrightarrow{AB}| = \frac{25}{\cos 60°} = \frac{25}{0.50}$$

50

127

Perímetro ABCD = ⌊_____⌋





80 + 50 × 2 + 30

210

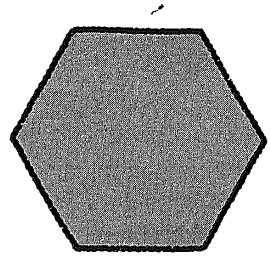
128

Se requiere determinar el área del exágono regular convexo, para el que

l = 12 cm

Recordemos que, en general, para un polígono regular convexo:

A = ⌊_____⌋



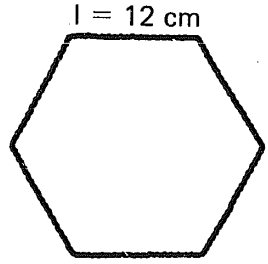
$$\frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}^*}{2}$$

* Estamos llamando apotema al segmento y a su medida.

129

¿Estamos en condiciones de determinar el perímetro del exágono representado?

Sí/No



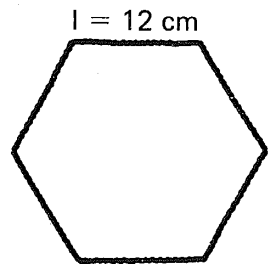
Sí

130

Perímetro = ⌊_____⌋

↓

⌊_____⌋

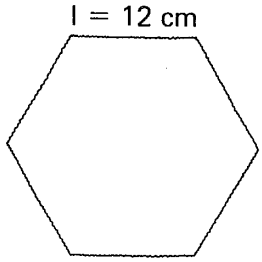


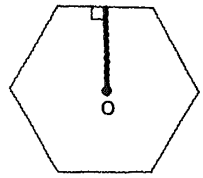
6 × 12

72 cm

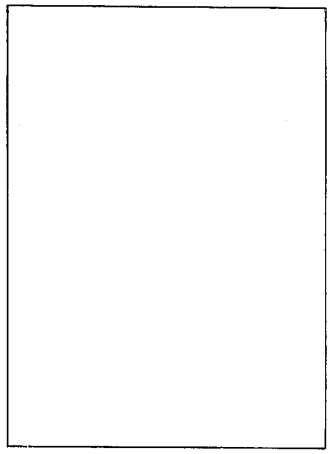
131

Trazar un segmento de recta que represente uno de los apotemas de este exágono.

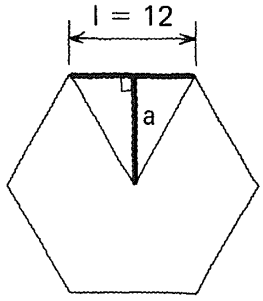


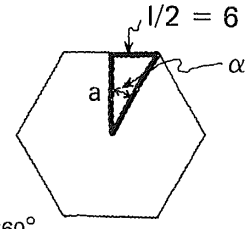


132



a ≐ ____





$\measuredangle\alpha = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$

$\frac{6}{a} = \tan 30^\circ$

$a = \frac{6}{\tan 30^\circ}$

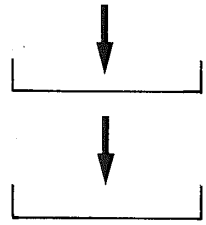
$a \doteq \frac{6}{0.5774}$

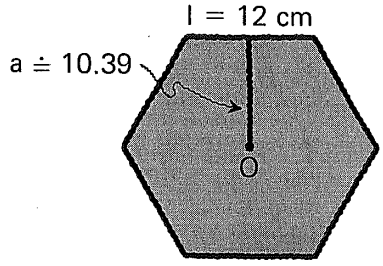
10.39

133

Área = ____

expresión general





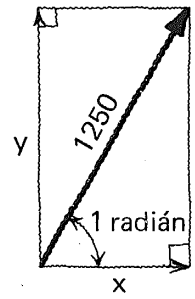
$\frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$

$\frac{72 \times 10.39}{2}$

374.04 cm^2

134

$x \doteq$ ⌊ ⌋



$\frac{x}{1250} = \cos 1$

$x = 1250 \cos 1$

$x \doteq 1250 \times 0.5403$

675.38

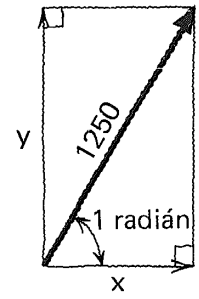
Recordemos que:

1 radián $= \frac{180^\circ}{\pi} \doteq 57.2958^\circ$

$\doteq 57^\circ 18'$

135

$y \doteq$ ⌊ ⌋



$\frac{y}{1250} = \text{sen } 1$

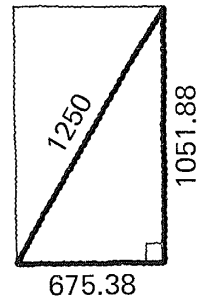
$y = 1250 \text{ sen } 1$

$y \doteq 1250 \times 0.8415$

1051.88

136

Comprobación pitagórica:



$1250^2 = 1051.88^2 + 675.38^2$

$1\,562\,500 = 1\,106\,451.53$
$+ 456\,138.14$

$1\,562\,500 \doteq 1\,562\,589.67$

5.2.3.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

5.2.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *aplicar* los procedimientos de resolución de triángulos rectángulos a la determinación de perímetros y áreas de polígonos.

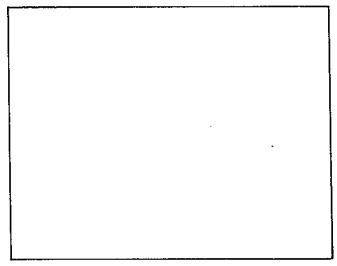
2.4

Resolución incompleta de
triángulos rectángulos.
Ejercicios de determinación de
medidas de ángulos

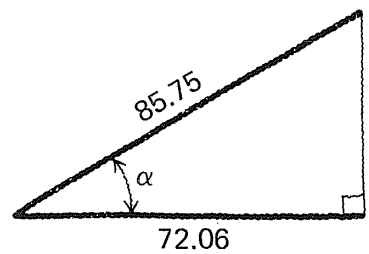
137

En los ejercicios siguientes,
el alumno
puede sugerir situaciones
a las que se aplique
cada uno
de los modelos estudiados.

138



$\measuredangle\alpha \doteq$ ⌊_____⌋



$$\cos\alpha = \frac{72.06}{85.75}$$

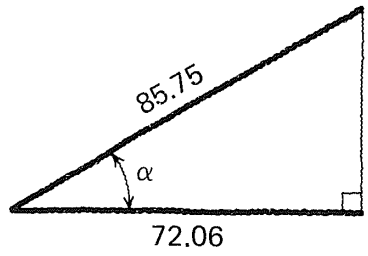
$\cos\alpha \doteq 0.8403$

$\measuredangle\alpha \doteq \arccos 0.8403$

$\measuredangle\alpha \doteq 32.83°$

$32°50'$

139



$\measuredangle\alpha \doteq$ [ ] radianes

A partir de:

$\measuredangle\alpha \doteq \arccos 0.8403$

(sí puede obtenerse en forma directa):

$\measuredangle\alpha \doteq 0.5730$ radianes

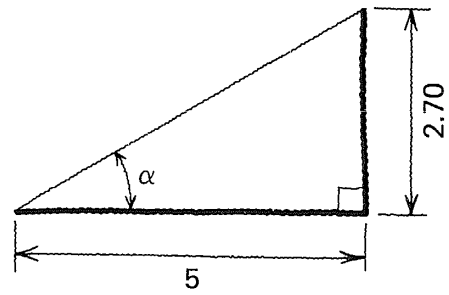
A partir de:

$\measuredangle\alpha \doteq 32.83^\circ$

$\measuredangle\alpha \doteq \frac{32.83^\circ \pi}{180^\circ} \doteq 0.1824\,\pi$ radianes

0.5730 radianes

140



$\measuredangle\alpha \doteq$ [ ] (en grados y minutos).

$\measuredangle\alpha \doteq$ [ ] radianes.

$\tan\alpha = \frac{2.70}{5}$

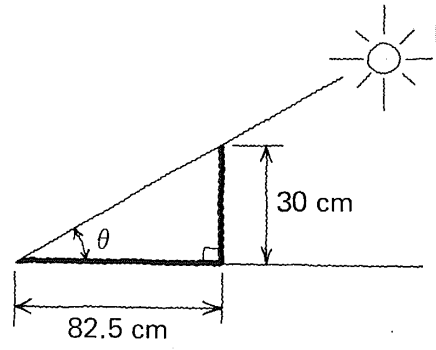
$\tan\alpha = 0.54$

$\measuredangle\alpha \doteq \arctan 0.54$

$28.37^\circ \doteq 28^\circ 22'$

$0.1576\pi \doteq 0.4951$ radianes

141



Medida del ángulo de inclinación del sol

$\measuredangle\theta =$ [ ] (en grados y minutos).

$\measuredangle\theta =$ [ ] radianes.

$\tan\theta = \frac{30}{82.5}$

$\tan\theta \doteq 0.3636$

$\measuredangle\theta \doteq \arctan 0.3636$

● $\measuredangle\theta \doteq 19.98^\circ \doteq 19^\circ 59'$

$\measuredangle\theta \doteq \frac{19.98}{180}\pi \doteq 0.111\pi$ radianes

● $\measuredangle\theta \doteq 0.3487$ radianes

142

Medida del **ángulo de elevación**

$\measuredangle\phi \doteq$ [ ] (en grados y minutos).

$\measuredangle\phi \doteq$ [ ] radianes.

Ver ilustración del cuadro siguiente:

$$\tan\phi = \frac{1.00}{2.50}$$

$\tan\phi = 0.40$

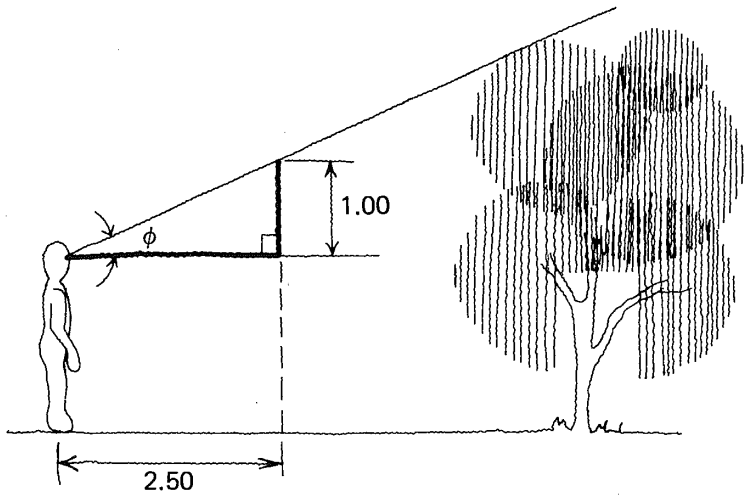
$\measuredangle\phi \doteq \arctan 0.40$

- $\measuredangle\phi \neq 21.80^\circ \doteq 21^\circ 48'$

$$\measuredangle\phi \doteq \frac{21.80}{180}\pi \doteq 0.1211\pi \text{ radianes}$$

- $\measuredangle\phi \doteq 0.3804$ radianes

143

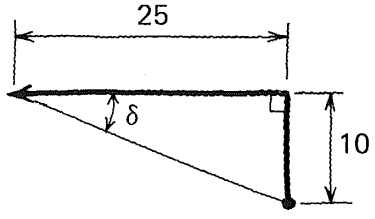


144

Medida del **ángulo de depresión**

$\measuredangle\delta \doteq$ [ ] (en grados y minutos).

$\measuredangle\delta \doteq$ [ ] radianes.



$$\tan\delta = \frac{10}{25}$$

$\tan\delta = 0.4$

$\measuredangle\delta \doteq \arctan 0.4$

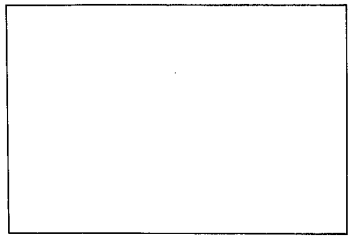
- $\measuredangle\delta \doteq 21.80^\circ \doteq 21^\circ 48'$

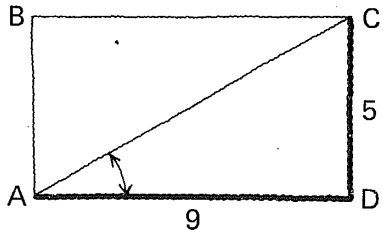
$$\measuredangle\delta \doteq \frac{21.80}{180}\pi \doteq 0.1211\pi \text{ radianes}$$

- $\measuredangle\delta \doteq 0.3804$ radianes

145

ABCD es un rectángulo.





$\measuredangle DAC \doteq$ [ ] (en grados y minutos).

$\measuredangle DAC \doteq$ [ ] radianes.

$$\tan \angle DAC = \frac{5}{9}$$

$\tan \angle DAC \doteq 0.5556$

$\measuredangle DAC \doteq \arctan 0.5556$

• $\measuredangle DAC \doteq 29.06^\circ \doteq 29^\circ 04'$

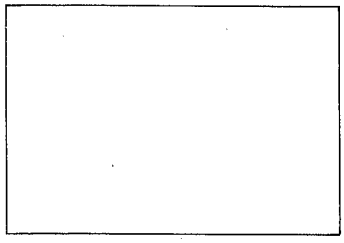
$$\measuredangle DAC \doteq \frac{29.06}{180}\pi$$

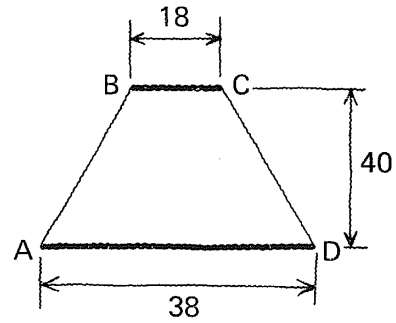
$\doteq 0.1614\pi$ radianes

• $\measuredangle DAC \doteq 0.5071$ radianes

146

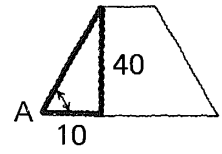
ABCD es un trapecio isósceles.





$\measuredangle A \doteq$ [ ] (en grados y minutos).

$\measuredangle A \doteq$ [ ] radianes.



$\tan A = \frac{40}{10} = 4$

$\measuredangle A \doteq \arctan 4$

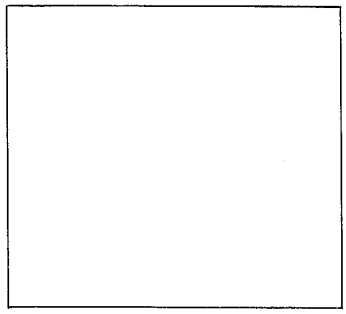
$\measuredangle A \doteq 75.96^\circ$

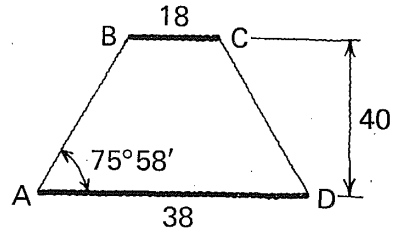
• $\measuredangle A \doteq 75^\circ 58'$

$\measuredangle A \doteq \frac{75.96}{180}\pi \doteq 0.422\pi$ radianes

• $\measuredangle A \doteq 1.3258$ radianes

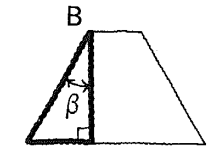
147





$\measuredangle B \doteq$ [ ] (en grados y minutos).

$\measuredangle B \doteq$ [ ] radianes.



$\measuredangle B \doteq 90^\circ - 75^\circ 58'$

$\measuredangle B \doteq 14^\circ 02'$

$\measuredangle B \doteq 14^\circ 02' + 90^\circ 00'$

• $\measuredangle B \doteq 104^\circ 02' \doteq 104.03^\circ$

$\measuredangle B \doteq \frac{104.03}{180}\pi \; 0.5779\pi$ radianes

• $\measuredangle B \doteq 1.8156$ radianes

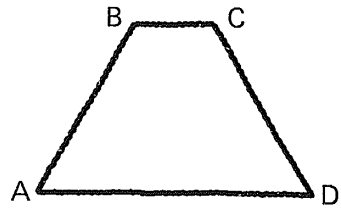
148

Sabemos que:

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D$

debe ser igual a [_____] grados,

o bien a [_____] radianes.



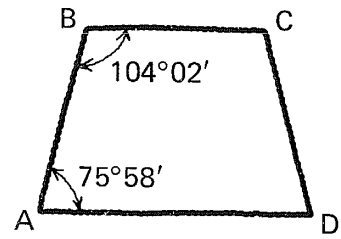
360

2π (aproximadamente 6.2832)

149

Comprobemos:

	Grados	Radianes
$\measuredangle A$	$\doteq$ [_____]	$\doteq$ [_____]
$\measuredangle B$	$\doteq$ [_____]	$\doteq$ [_____]
$\measuredangle C$	$\doteq$ [_____]	$\doteq$ [_____]
$\measuredangle D$	$\doteq$ [_____]	$\doteq$ [_____]
$\Sigma \measuredangle$	$\doteq$ [_____]	$\doteq$ [_____]



75°58′	1.3258
104°02′	1.8155
104°02′	1.8155
75°58′	1.3258
358°120′	6.2827
360°	2π

5.2.4.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

5.2.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *aplicar* los procedimientos de resolución de triángulos rectángulos a la determinación de medidas de ángulos en grados y radianes.

2.5

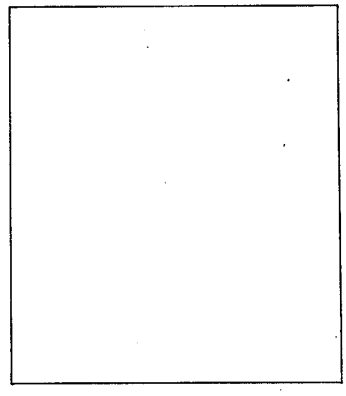
Resolución de triángulos rectángulos. Problemas de aplicación

150

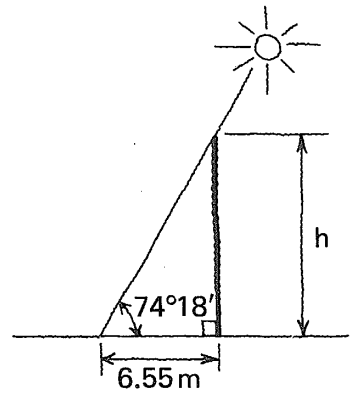
Se requiere determinar
la altura de un poste **vertical**
cuya sombra proyectada sobre
el suelo, que suponemos
horizontal,
mide 6.55 metros.
La medida del
ángulo de inclinación
del sol, previamente
determinada
es igual a 74°18'.

151

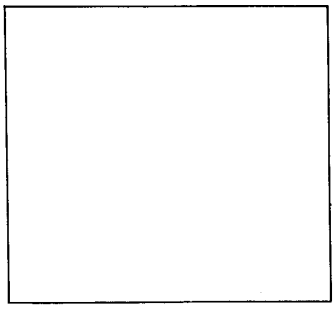
Croquis auxiliar: →

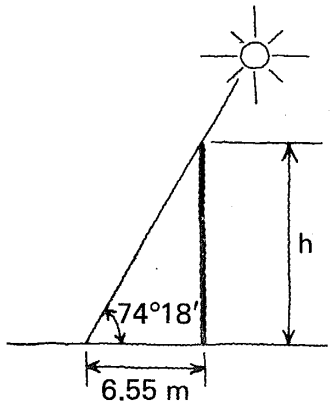


Por ejemplo:



152





$h \doteq \square$ m

$$\tan 74°18' = \frac{h}{6.55}$$

$h = 6.55 \tan 74°18'$

$h \doteq 6.55 \times 3.5576$

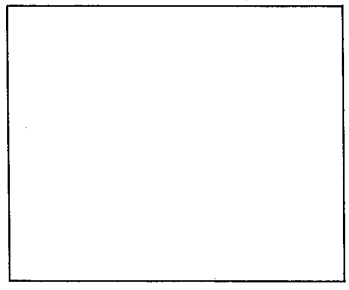
23.30

153

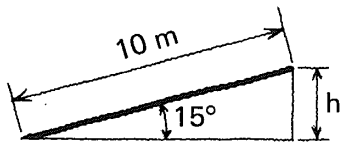
El ángulo de inclinación
de una rampa mide 15°
y su longitud (inclinada)
es de 10 metros.
¿A qué altura sube la rampa?

154

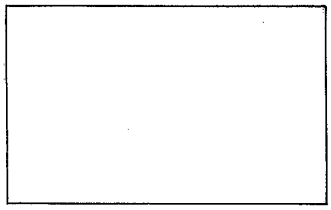
Croquis auxiliar: →

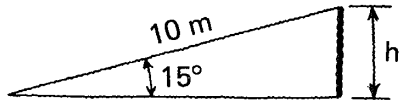


Por ejemplo:



155





$h \doteq \underline{\quad\quad} m$

$\frac{h}{10} = \text{sen } 15°$

$h = 10 \text{ sen } 15°$

$h \doteq 10 \times 0.2588$

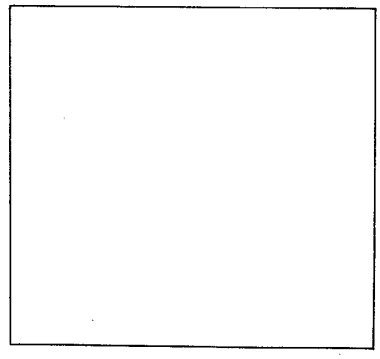
2.59

156

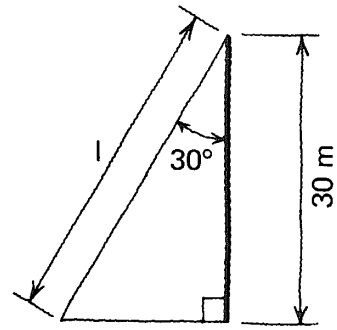
¿Qué longitud debe tener un tirante de alambre que va desde el suelo hasta el extremo superior de un poste vertical de 30 metros de altura, y que forma con éste un ángulo de 30°?

157

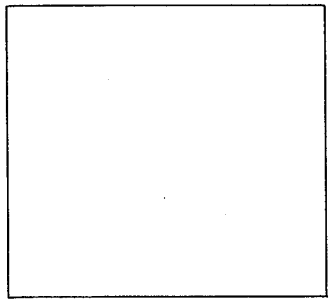
Croquis auxiliar: ➡



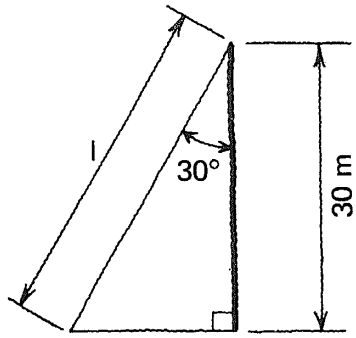
Por ejemplo:



158



$l \doteq$ ⌊_____⌋ m.



$$\frac{30}{l} = \cos 30°$$

$$l = \frac{30}{\cos 30°}$$

$$l \doteq \frac{30}{0.8660}$$

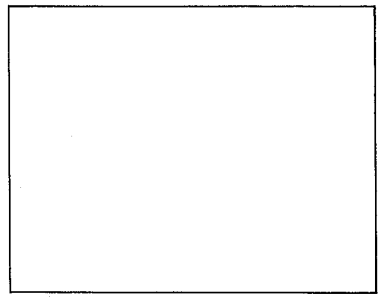
34.64

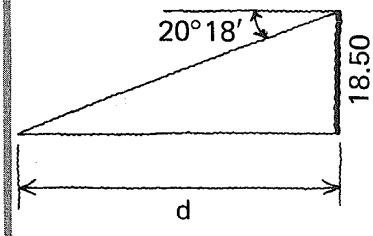
159

Un observador situado
en la parte superior de
una torre vertical
ve un vehículo que se acerca.
El ángulo de depresión
medido es de
20°18′, y la altura de la torre
es de 18.50 metros.
¿A qué distancia de la torre
se encuentra el vehículo en el
momento preciso de la observación?

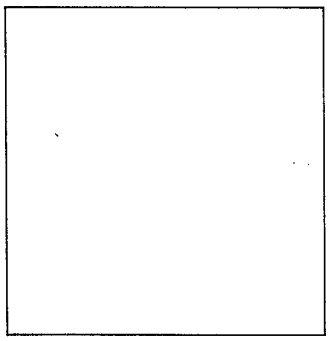
160

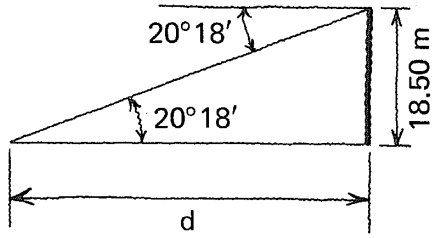
Croquis auxiliar: →





161





$d \doteq$ _____ m

$$\tan 20°18' = \frac{18.50}{d}$$

$$d = \frac{18.50}{\tan 20°18'}$$

$$d \doteq \frac{18.50}{0.3699}$$

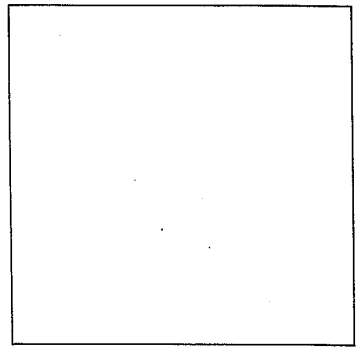
50.01

162

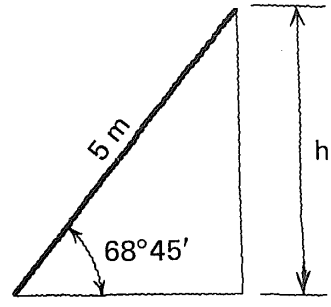
Una escalera de 5 metros de longitud se encuentra apoyada sobre un muro vertical, y forma en relación con el piso un ángulo de 68° 45′.
¿A qué altura se halla el extremo superior de la escalera?

163

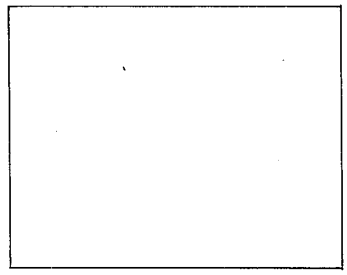
Croquis auxiliar: →



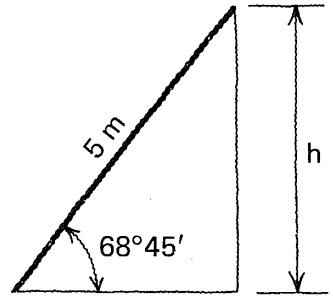
Por ejemplo:



164



h ≐ ⌊_____⌋ m



$$\text{sen } 68°45' = \frac{h}{5}$$

$$h = 5 \text{ sen } 68°45'$$

$$h = 5 \times 0.9320$$

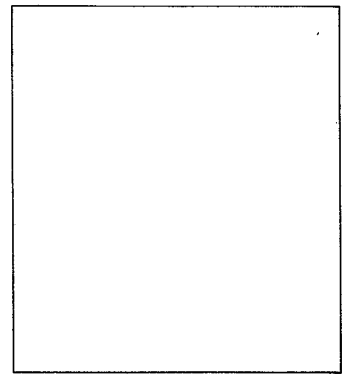
4.66

165

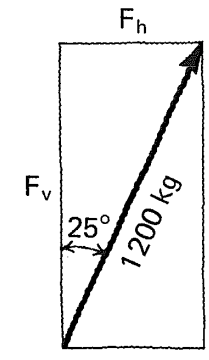
¿Qué medida tienen las componentes horizontal y vertical de una fuerza de 1200 kg, que forma un ángulo de 25° en relación con la vertical?

166

Croquis auxiliar: →



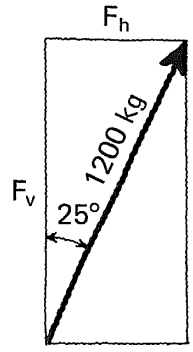
Por ejemplo:



167

$F_v \doteq$ ⌊_____⌋ kg

$F_h \doteq$ ⌊_____⌋ kg



$$\frac{F_v}{1200} = \cos 25°$$

$F_v = 1200 \times \cos 25°$

$F_v \doteq 1200 \times 0.9063$

1087.56

$$\frac{F_h}{1200} = \text{sen } 25°$$

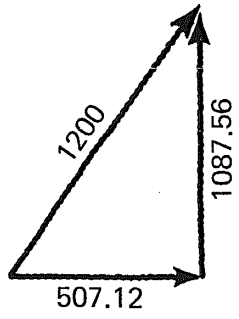
$F_h = 1200 \text{ sen } 25°$

$F_h = 1200 \times 0.4226$

507.12

168

Comprobación pitagórica:



$1200^2 = 1087.56^2 + 507.12^2$

1 440 000 = 1 182 786.75
+ 257 170.69

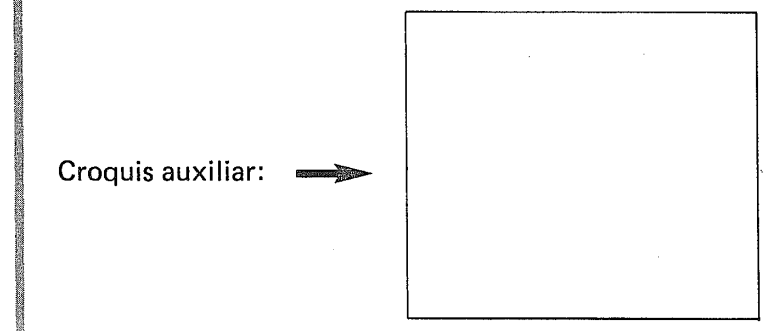
1 440 000 = 1 439 958.44

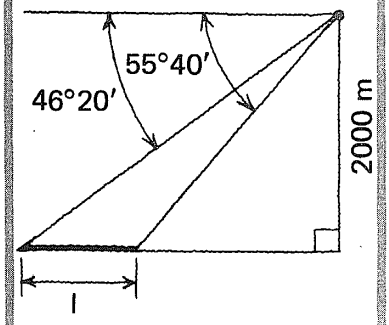
169

Desde un avión que se encuentra a 2000 metros de altura, el piloto ve una isla que se encuentra en su línea de vuelo. Las medidas de los ángulos de depresión del extremo cercano y lejano de la isla son 55°40′ y 46°20′, respectivamente. ¿Cuál es la dimensión de la isla en la dirección de la observación?

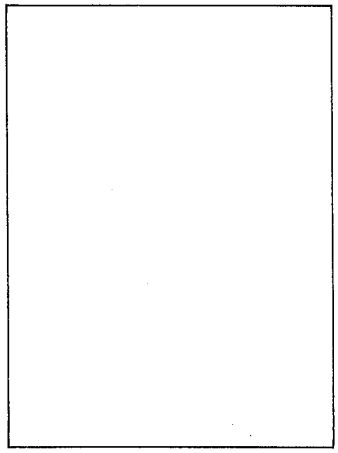
170

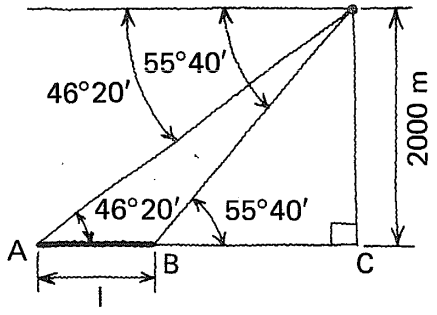
Croquis auxiliar: →





171





$l \doteq$ ⌊_____⌋ m

$$\frac{2000}{|\overrightarrow{AC}|} = \tan 46^\circ 20'$$

$$|\overrightarrow{AC}| \doteq \frac{2000}{\tan 46^\circ 20'}$$

$$|\overrightarrow{AC}| \doteq \frac{2000}{1.0477} \doteq 1908.94 \text{ m}$$

Similarmente.

$$|\overrightarrow{BC}| = \frac{2000}{\tan 55^\circ 40'}$$

$$|\overrightarrow{BC}| \doteq \frac{2000}{1.4641} \doteq 1366.03 \text{ m}$$

$$l \doteq |\overrightarrow{AC}| - |\overrightarrow{BC}| \doteq 542.91$$

5.2.5.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

5.2.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* problemas relacionados con la determinación de medidas de lados y ángulos de triángulos rectángulos.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de febrero de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100